

FUNCIONES DE $\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}^m$

Nota: se entenderá $\log x = \log_{10} x$ y $\ln x = \log_e x$

1.- Determinar y representar gráficamente el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 3}}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2 + x + 1}$

f) $f(x) = e^{\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}}$

g) $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$

h) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

i) $f(x) = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

j) $f(x) = \ln(x + 2) + \ln(x - 2)$

k) $f(x, y) = 3x + y$

l) $f(x, y) = \frac{3x + y}{x^2 + 2y^2}$

m) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x - y}}$

n) $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$

o) $f(x, y) = \ln(2x - y + 1)$

p) $f(x, y) = x + \sqrt{y}$

q) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$

r) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

s) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

t) $f(x, y) = \ln(3x^2 + y^2 + 4)$

u) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

v) $f(x, y) = \left(\ln(x + y), \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right)$

2.- Representar gráficamente las curvas de nivel de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x + y$

b) $f(x, y) = (x + y)^2$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2$

d) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

e) $f(x, y) = \sqrt{xy}$

f) $f(x, y) = x^y, x > 0$

g) $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$

h) $f(x, y) = \ln(2x - y + 1)$

i) $f(x, y) = \frac{x + y}{x}$

3.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^3 + 3} - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^x$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{1+2^x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{1}{3+4^x}}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 6x}{3x^2 - 8}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{3x} \right)^x$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4} \right)^{\frac{x^2}{x+1}}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^{-x}}$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x} \right)^x$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{8x-1} \right)^{-x}$

l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{3x^2y}{4x - y + 1}$

m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2}{5x^2 + y^2}$

n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left(x^2 + 5xy - 8, e^{x^2y}, \ln(2x+y) \right)$

4.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3y^2}{7x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

5.- Calcular la primera derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^5$

b) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$

e) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

f) $f(x) = \sqrt{2x-1}$

g) $f(x) = \ln x + \sqrt{x^2 + 1}$

h) $f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln 2$

i) $f(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$

j) $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

k) $f(x) = \ln x \log x - \ln a \log_a x$

l) $f(x) = \frac{3}{56(2x-1)^7} - \frac{1}{24(2x-1)^6} - \frac{1}{40(2x-1)^5}$

m) $f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2^x} + 1 + \ln^5 x$

n) $f(x) = x^2 10^{2x}$

$$o) f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x)$$

$$p) f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

$$q) f(x) = x^4(a - 2x^3)^2$$

$$r) f(x) = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

$$s) f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$$

$$t) f(x) = (2x+1)(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}$$

$$u) f(x) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$$

$$v) f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$$

$$w) f(x) = \operatorname{sen} x^4$$

$$x) f(x) = \cos^4 x$$

$$y) f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos x^6$$

6.- Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

$$a) f(x, y, z) = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$$

$$b) f(x, y) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

$$c) f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$d) f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$$

$$e) f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$$

$$f) f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

$$g) f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$h) f(x, y) = x^y$$

$$i) f(x, y, z) = z^{xy}$$

$$j) f(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$$

$$k) f(x, y) = x^2 \operatorname{sen}^2 y$$

$$l) f(x, y) = \frac{e^{ax}(\operatorname{sen} x + a \cos y)}{a^2 + b^2}$$

7.- Comprobar que $y = xe^{-x}$ verifica la ecuación $x \frac{dy}{dx} = (1-x)y$.

8.- Calcular y' en las siguientes expresiones:

$$a) 2x^2 + 5xy + y^2 = 19$$

$$b) x^2 + y^2 = 25$$

$$c) y = 1 + xe^y$$

$$d) \ln y + e^{-\frac{y}{x}} = 8$$

$$e) \ln y + \frac{x}{y} = 7$$

$$f) x^y = y^x$$

9.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x=1$.

Hallar un valor aproximado de $f'(1)$.

10.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x^2}{3x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\frac{1}{2}x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\operatorname{sen} x)}{x^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x^3}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x^2}$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{1 - e^x}$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos 2x}$

o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1 + x))}{x \ln(1 + x)}$

p) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$

q) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x + 1) - \ln x]$

s) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln x$

t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^6)}{x^2}$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x^3) e^{-x}$

11.- Calcular $\nabla f(x, y)$ cuando $f(x, y) = x^2 y + y^3$.

12.- Hallar la matriz jacobiana de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln^2 x$

b) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$

c) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$

d) $f(t) = (t, e^t, e^{-t})$

13.- Calcular $\frac{dz}{dt}$ en las funciones:

a) $z = 3x + y$, con $x = t^2 + 1$; $y = e^t$.

b) $z = xy + yu + xu$, con $x = t$; $y = e^{-t}$; $u = \log(t)$.

c) $z = e^{xy}$, con $x = t \cos t$; $y = t \operatorname{sen} t$.

14.- Calcular $\frac{dz}{du}(1)$ en la función $z = 3x^2 + 2xy - y^2$, con $x = u^2 + 3u$; $y = 2u^2 - u$.

15.- Calcular $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{\partial u}{\partial s}$ en la función $u = z \operatorname{sen} \frac{y}{x}$, con $x = 3r^2 + 2s$; $y = 4r - 2s^3$, $z = 2r^2 - 3s^2$.

16.- Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y evaluarlas en el punto $(x, y) = (0, 1)$, en los siguientes casos:

a) $z = u + v$, con $u = x + e^y$; $v = \log(y) + e^{-x}$.

b) $z = \frac{\operatorname{sen} u}{v}$, con $u = s - t$; $v = s + x$; $s = y^2 - x$; $t = e^y$.

17.- Demostrar que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$, si $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$.

18.- Demostrar que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, si $z = xy + x e^{y/x}$.

19.- Demostrar que se verifica

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + xy \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = xyz,$$

siendo $z = e^y F\left(y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ y F una función real de variable real derivable.

20.- Sea $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$, siendo $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en cualquier punto de la recta real. Si $g'(5) = 3$, calcular $\nabla f(1, 2)$.

21.- Determinar la diferencial de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $y = \ln x$, en 2

b) $y = \frac{x^2}{e^x}$, en 0

c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, en $(1, 1)$

d) $u = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z$, en $(1, 1, 1)$.

e) $z = \ln \frac{2x}{y^2}$, en $(1, e)$

j) $f(x, y) = x^2 e^{\frac{y}{x}}$, en (x, y) con $x \neq 0$

k) $z = (e^{x+y} + y, xy^2)$, en $(0, 0)$

22.- Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$, utilizando el concepto de diferencial, estudiar la variación que experimenta la función al pasar de $x=27$ a $x=26,9$.

23.- Calcular la derivada direccional de las siguientes funciones en la dirección y en el punto indicados:

a) $f(x, y) = 3 - 2x^2 + y^3$, en la dirección de $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ y en el punto $P=(1,2)$

b) $f(x, y) = x^2 + y + 1$, en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y en el punto $(0,0)$

c) $f(x, y) = \log(x^2 + y^3)$, en la dirección de $v = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ y en el punto $P = (1,3)$

d) $f(x, y, z) = x \operatorname{sen}(yz)$, en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ y en el punto $(1,3,0)$

e) $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} y + y \cos z + z \operatorname{sen} x$, en la dirección $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y en el punto $(0,0,0)$

f) $f(x, y, z) = (x^2 + yz^2, \operatorname{sen}(x^2 + y^2))$, en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y en el punto $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, 1)$

24.- Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en el punto $(1,2)$. Sabiendo que $f_v(1,2) = 5$ y

$f_w(1,2) = 6$ con $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $w = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, calcular $\nabla f(1,2)$.

25.- Dado el campo vectorial $f(x, y) = (xy, x^2, y^2)$, se pide:

a) Estudiar su diferenciabilidad en el punto $(-1,2)$.

b) En el caso de ser diferenciable, calcular su diferencial en dicho punto.

c) Hallar f_v' en el punto $(-1,2)$ siendo $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

26.- Calcular y'' en $y = \ln(x + \sqrt{4 + x^2})$.

27.- Dada $f(x, y) = x e^{2y-x}$, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

28.- Calcular la matriz hessiana de las siguientes funciones:

- a) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$.
- b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 4\ln x - 10\ln y, x, y > 0$.
- c) $f(x, y) = 9x^2 + y^2 + 6xy + 12x + 4y$.
- d) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.
- e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.
- f) $f(x, y, z) = xyz$.

29.- Si F y G son funciones reales de una variable real con derivadas de segundo orden continuas, demostrar que la función $z = x F\left(\frac{y}{x}\right) + G\left(\frac{y}{x}\right)$, satisface la siguiente ecuación:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

30.- Sabiendo que f y g son funciones reales de una variable real con derivadas de segundo orden y $z = f(x^2 + y^2) + g(x^2 + y^2)$, calcular:

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) - \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) - \frac{1}{x^3} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{y^3} \frac{\partial z}{\partial y}(x, y).$$

31.- Comprobar que $z = \log(x^2 + y^2)$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

32.- Si f es una función real de variable real con derivada segunda, comprobar que la función $z = x f(x + y) + y f(x + y)$ satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

33.- Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones reales de variable real y $h(x, y) = f(y \cdot g(x))$. Suponiendo que existen f'' y g'' en todo $\mathbb{R}$, calcular $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y)$.

34.- Calcular el desarrollo de Taylor hasta el orden 2 de las siguientes funciones en un entorno del punto que se indica:

- a) $f(x) = \ln(1 + x), x = 0$
- b) $f(x) = e^x, x = 0$

$$c) f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x = 0$$

$$d) f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad x = 0$$

$$e) f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x = 0$$

$$f) f(x) = \operatorname{sen} x, \quad x = 0$$

$$g) f(x) = \cos x, \quad x = 0$$

$$h) f(x) = \frac{2x^2 - 3}{(x-1)^2}, \quad x = 0$$

$$i) f(x) = \ln(x - 2x^2), \quad x = \frac{1}{3}$$

$$j) f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad x = 0$$

$$k) f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \quad x = 1$$

$$l) f(x) = \sqrt[3]{6+x}, \quad x = 2$$

$$m) f(x) = (1+x)e^{-x}, \quad x = 0$$

$$n) f(x) = (1+e^x)^3, \quad x = \frac{1}{2}$$

$$o) f(x) = \operatorname{sen}^2 2x, \quad x = 0$$

$$p) f(x) = \ln(2x) - \frac{1}{x-1}, \quad x = 2$$

$$q) f(x) = e^x \ln(1-x), \quad x = 0$$

$$r) f(x) = \ln(9-x^2), \quad x = 0$$

$$s) f(x, y) = e^{2x-3y}, \quad (x, y) = (0, 0)$$

$$t) f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) = (1, 1)$$

$$u) f(x, y, z) = x + yz + e^y, \quad (x, y, z) = (1, 0, 1)$$

35.- Dada la función $f(x, y) = \sqrt{x+y} \ln y$, se considera la ecuación $f(x, y) = 2e$. Se pide:

- Demostrar que la anterior ecuación define a y como función implícita de x en un entorno del punto $(0, e^2)$.
- Calcular $y'(0)$.

36.- Dada la ecuación $e^z \operatorname{sen}(x+y) + e^y \operatorname{sen}(x+z) + e^x \operatorname{sen}(y+z) = 0$, se pide:

- Comprobar que define a z como función implícita de x y de y en un entorno del punto $(\pi, 0, \pi)$.
- Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}(\pi, 0)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(\pi, 0)$.

37.- Probar que la ecuación $x^2 y + xy^2 = 16$ define a y como función implícita de x en un entorno del punto $(2, 2)$. ¿Qué podemos decir del crecimiento de la función $y(x)$ en un entorno de $x=2$?

38.- Considerar la ecuación $3\alpha x^2 - \ln(yz) - \frac{3\alpha x}{yz} = 0$. ¿Para qué valores del parámetro α podemos asegurar que la ecuación anterior define implícitamente la función $x = x(y, z)$ en un entorno del punto $(1, 1, 1)$?

39.- Dada la ecuación $z \operatorname{sen} x - y \operatorname{sen} z = 0$, se pide:

a) Demostrar que define a z como función implícita de (x, y) en un entorno de $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Hallar el polinomio de Taylor de grado 1 en un entorno del punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de la función definida en el apartado a).

40.- Sea $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y) + x y + a^2 y$.

a) ¿Para qué valores de a la ecuación $h(x, y) = 0$ define a y como función implícita de x , $y = \varphi(x)$, en un entorno del punto $(0, 0)$?

b) Calcular $\varphi'(0)$.

c) ¿Define la misma ecuación en un entorno del $(0, 0)$ a x como función implícita de y para algún valor de a ?

d) Sea $F(x, t) = (e^{x+t} + x^2 - 1, e^{\varphi(x)} + t \cos x - 1)$, con $\varphi(x)$ la función implícita anterior. Probar que $JF(0, 0)$ es una matriz regular.

41.- Dada la ecuación $e^{x^2-y^2} + \alpha(x^2 + y^2) = 1 + \alpha$, se pide:

a) ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la ecuación $e^{x^2-y^2} + \alpha(x^2 + y^2) = 1 + \alpha$ define una función implícita $y = y(x)$ en un entorno del punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

b) Para los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, hallados en el apartado anterior, calcular $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

42.- Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = \alpha y z - y \ln(1 + z^2) + z \cos(x + 2y) + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Probar que $f(x, y, z) = 0$ define a z como función implícita de x e y en un entorno de $(\pi, 0, 1)$ para cualquier valor de α .

b) Calcular α para que $\frac{\partial z}{\partial x}(\pi, 0) = 0 = \frac{\partial z}{\partial y}(\pi, 0)$.

43.- Dada la ecuación $xy^2 - yx^2 + z^2 \cos(xz) = 1$:

- Probar que define a $z(x,y)$ como función implícita en un entorno del punto $(0, \sqrt{2}, 1)$.
- Hallar el plano tangente a $z(x,y)$ en el punto $(0, \sqrt{2})$.
- Hallar la derivada direccional de $z(x,y)$ en $(0, \sqrt{2})$ respecto de la dirección $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

44.- Sea $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z, t) = x^3 z + y^3 t^2 - 1$:

- Probar que la ecuación $F(x, y, z, t) = 0$ define a la variable t como función de las variables (x, y, z) en un entorno del punto $(0, 1, 0, 1)$.
- Si $t = \varphi(x, y, z)$ es la función del apartado anterior, calcular $\nabla \varphi(0, 1, 0)$.

45.- Estudiar si son homogéneas las siguientes funciones indicando el grado de homogeneidad:

a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x}$

b) $f(x, y) = 3x^4 + 4x^2y^2 + 5y^4$

c) $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^3 + y^3}$

d) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/3}$

f) $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 - 15x - 12y$

g) $f(x, y) = 90x^{1/3}y^{1/3}$

h) $f(x, y) = x^a y^b$

i) $f(x, y, z) = \left(\frac{x^3y + x^2yz - 4xz^3}{x - 2y} \right)^5$

j) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2} \ln \frac{y}{z}$

k) $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^2 - y^2} + \sqrt{x + z}$

l) $f(x, y, z) = \sqrt[5]{\frac{x^6 + y^4x^2 + yz^5}{2z^3}}$

m) $f(x, y, z) = \ln \frac{x - 2y}{y + 3z}$

n) $f(x, y, z) = e^{3x+y} + \sqrt[3]{xz}$

o) $f(x, y, z) = e^{\sqrt{\frac{x^2}{yz}}}$

p) $f(x, y, z) = x \ln \frac{y}{z} + \sqrt{2yz} + 7$

46.- Para las funciones del ejercicio anterior, calcular las derivadas parciales. Comprobar el resultado del teorema de Euler.

47.- Dada $f(x,y) = x^4 y^2 e^{y/x}$, comprobar que $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 6f$. ¿Qué se deduce de la anterior igualdad?

48.- Sea f una función homogénea de grado m , tal que $f(-1,1) = 1$ y $f(-2,2) = 1$. Calcular m .

49.- Sea f una función diferenciable y homogénea de grado 2 con $\frac{\partial f}{\partial x}(3,2) = 3$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(3,2) = 4$. Calcular $f(3,2)$.

50.- De la función $f(x,y,z)$ se sabe que es diferenciable, homogénea de grado 3 y que las componentes de su vector gradiente en el punto $(1,2,3)$ son $(5,2,2)$. ¿Cuál es el valor de la función en el punto $(1,2,3)$?

51.- Sea $z = z(x,y)$ que verifica la ecuación $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$, siendo F una función con derivadas de primer orden, la segunda de ellas no nula. Se pide:

a) Demostrar que $z = z(x,y)$ es homogénea de grado 1.

b) ¿Es homogénea $\frac{\partial z}{\partial x}$? En caso afirmativo, ¿de qué grado? Razona la respuesta.

52.- Sea $f(x,y)$ homogénea de grado 1 con derivadas de segundo orden. Probar que:

$$\frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{xy} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

53.- Sea $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$. Demostrar que:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

54.- Dada la función $f(x,y,z) = e^{\frac{\operatorname{tg} \frac{x^2+y^2+z^2}{xy}}}{xy}$:

a) Comprobar que es homogénea de grado 0.

b) Calcular $x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

55.- Sean $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables y homogéneas de grados 4 y 1, respectivamente. Probar que si $h(x,y,z) = f(x,y,z) \cdot g(x,y,z)$, se verifica:

$$x \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) + y \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) + z \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) = 5 h(x,y,z).$$

56.- Sea $f(x,y)$ diferenciable tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1$, $f(1,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 1$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1$, $f(1,2) = 5$. Decir si f es homogénea y en caso afirmativo de qué grado.

57.- Sea $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$. Se pide:

- Calcular las curvas de nivel de $f(x,y)$ y representarlas gráficamente.
- Calcular $\nabla f(2,1)$.
- Calcular la derivada direccional de f en el punto $(2,1)$ según la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- Teniendo en cuenta $\begin{cases} x = 2 + \ln t^2 \\ y = e^{t^3-1} \end{cases}$, calcular $\frac{df}{dt}(1)$.

58.- Sea la función $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + 2y^2)$. Se pide:

- Calcular el dominio de f .
- Calcular el vector gradiente de f en (x,y) .
- ¿Es la función f diferenciable?
- Calcular la derivada direccional de la función f respecto de la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ en el punto $(1,1)$.
- ¿Verifica la función f las condiciones del Teorema de Schwarz?
- Utilizando el resultado del apartado anterior, calcular la matriz Hessiana de f en (x,y) .

59.- Sea la función $f(x, y) = \ln\left(\frac{y}{x^2} + 1\right) - 1$.

- a) Determinar las curvas de nivel de la función y representarlas gráficamente.
- b) Calcular $\nabla f(1, 2e)$.
- c) Dado el vector $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, calcular la derivada direccional $f_v(1, 2e)$.
- d) Probar que la curva de nivel 0 de f define implícitamente a la variable y como función de la variable x . Derivando implícitamente calcular $y'(1)$.

60.- Considerar la función de dos variables $f(x, y) = \frac{y}{x + 2y}$.

- a) Determinar su dominio y representarlo gráficamente.
- b) Determinar y representar las curvas de nivel de f .
- c) Probar que no existe el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.
- d) Determinar los pares $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tales que la ecuación $f(x, y) = \frac{b}{a + 2b}$ define a la variable y como función de la variable x en un entorno del punto (a, b) . Para cada uno de los pares anteriores, calcular $y'(a)$ por derivación implícita.

61.- Sea $F(x, y, z) = x^2 z y + e^{xz} - z^2 y + 4y$:

- a) Sin calcular las derivadas parciales, razona si la siguiente igualdad es cierta:

$$x \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 4F(x, y, z).$$

- b) Calcular $\nabla F(0, 2, 1)$.
- c) Calcular la derivada direccional de $F(x, y, z)$ respecto de la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ en el punto $(0, 2, 1)$.
- d) Demuestra que la ecuación $F(x, y, z) = 7$ define a x como función implícita de y, z ($x = f(y, z)$) en un entorno del punto $(0, 2, 1)$.
- e) Calcular $\nabla f(2, 1)$.
- f) Calcular la derivada direccional de $f(y, z)$ respecto de la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ en el punto $(2, 1)$.

62.- Sabiendo que la oferta de un bien en función de su precio p es:

$$S(p) = \begin{cases} \frac{p^2}{20} & \text{si } 0 \leq p < 10 \\ 2p - 15 & \text{si } 10 \leq p \leq 30 \end{cases}$$

- a) Determine el dominio de la función de oferta.
- b) ¿Cuál es la oferta si el precio es de 5 unidades monetarias?

63.- La demanda de un bien en función de su precio viene dada por una función de la forma $D(p) = ap^2 - b$. Determinar los valores de a y de b sabiendo que $D(8) = 1$ y que $\lim_{p \rightarrow 0} D(p) = 5$.

64.- El coste total de producir q unidades de un artículo es $C(q) = 4q^3 - 6q^2 + 18q + 12$.

- a) Calcule el coste de producir 1 unidad.
- b) Si se producen 20 unidades, ¿Cuál es el coste medio de producir cada una de ellas?
- c) Escriba la función de coste medio.
- d) Escriba la función de coste marginal.

65.- El beneficio, $B(p)$, que obtiene una empresa conocido el precio de venta del producto, $p \in [2, 6]$, viene dado por dos segmentos rectilíneos cuyas pendientes son en ambos casos 0'2. Además se sabe que $B(3) = 50$ y que al ir aumentando el precio y pasar de 4 unidades monetarias se pierde una subvención que hace bajar el beneficio en 10 unidades. Escriba y represente esta función de beneficio.

66.- La función de costes según el número de horas trabajadas, x , es de la forma

$$C(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \in [0, 100] \\ c\sqrt{x} & \text{si } x \in (100, 200] \end{cases}. \text{ Determine } a, b, c \text{ sabiendo que } C(x) \text{ es continua,}$$

que la pendiente de la recta tangente en $x = 50$ es 8 y que 121 horas trabajadas suponen un coste igual a 990.

67.- La función de producción de un bien es $Q(K, L) = 8\sqrt[3]{K^2L}$, donde Q es la cantidad de producción, K y L la cantidad de inputs capital y trabajo respectivamente.

Demostrar que la productividad del trabajo es una función de la ratio capital-trabajo (sólo depende de la proporción entre el capital y el trabajo).

68.- Sea la función de producción de una empresa $Q(K,L) = 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{2}{5}}$, donde K es el capital, L el trabajo y Q la producción obtenida.

- Suponiendo que se están utilizando 9 unidades de capital y 32 de trabajo, ¿qué input se deberá aumentar para generar un mayor incremento de la producción, suponiendo que el otro se mantiene constante?
- Suponiendo que se están utilizando 9 unidades de capital y 32 de trabajo, ¿cuál sería aproximadamente la variación de la producción si se incrementa en 2 unidades el capital y en 1 el trabajo?
- Sin realizar las derivadas, calcular la expresión $K \frac{\partial Q}{\partial K}(K,L) + L \frac{\partial Q}{\partial L}(K,L)$.

69.- Una empresa produce dos productos en cantidades q_1 y q_2 respectivamente, siendo sus ingresos $I(q_1, q_2) = q_1 q_2$. Cada uno de los productos tiene una función de producción que depende del capital K y del trabajo L que vienen dadas por:

$$q_1(K,L) = 3K + 2L, \quad q_2(K,L) = 6\sqrt{K^2 L}$$

- Calcular $\frac{\partial I}{\partial K}(K,L), \frac{\partial I}{\partial L}(K,L)$ cuando se utilizan 4 unidades de capital y 9 de trabajo.
- ¿Son homogéneas las funciones de producción?, ¿de qué grado?
- Sin hacer las derivadas, calcular $K \frac{\partial I}{\partial K}(K,L) + L \frac{\partial I}{\partial L}(K,L)$.

INTEGRALES DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

1.- Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1) $\int \frac{3}{1+2y} dy$

2) $\int \frac{6z}{(z^2-5)^5} dz$

3) $\int \frac{1}{t^2} \sqrt{-1+\frac{1}{t}} dt$

4) $\int (5-2x+\sqrt[4]{x^3}+8e^x) dx$

5) $\int \frac{t}{1+t^2} dt$

6) $\int \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} dy$

7) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 8 \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right) dx$

8) $\int \left(\frac{1}{3}x + 5 \right)^9 dx$

9) $\int \frac{\ln t}{t} dt$

10) $\int \frac{5^t - 3^t}{7^t} dt$

11) $\int \frac{(\sqrt{x}-2x)^2}{\sqrt{x}} dx$

12) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+13} dx$

13) $\int \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} dx$

14) $\int tg(x) dx$

15) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \operatorname{sen} x dx$

16) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

18) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} dx$

19) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$

20) $\int \frac{4-2x}{x^2-4x+3} dx$

21) $\int \frac{x-3}{x^2-6x+3} dx$

22) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$

23) $\int \frac{x^2 dx}{(x^3-1)^2}$

24) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$

2.- Calcular las siguientes integrales definidas:

1) $\int_1^2 \left(x^3 - \frac{1}{x^2} + 2 \right) dx$

2) $\int_0^1 e^{-t+1} dt$

3) $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

4) $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \sqrt{x} \right) dx$

5) $\int_{-2}^0 \left(\frac{x+4}{3} \right)^2 dx$

6) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$

3.- Resolver los siguientes problemas de aplicación del cálculo integral al cálculo de áreas:

1) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $3y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

2) Calcular el área de la figura plana limitada por las parábolas $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$.

- 3) Calcular el área de la figura plana limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 2x$, $y = \frac{x^2}{2}$.
- 4) Calcular el área de la figura limitada por las curvas $x = 0$, $x = 2$, $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$.
- 5) Calcular el área limitada por la curva $y = x^2 - 5x + 6$ y la recta $y = 2x$.
- 6) Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$.
- 7) Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$.
- 8) Calcular el área limitada por las parábolas $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$.

4.- Resolver los siguientes problemas de aplicación del cálculo integral:

- 1) Para un cierto país, la propensión marginal al consumo está dada por $\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}$ donde el consumo C es una función del ingreso nacional I (en millones de euros). Determinar la función de consumo para el país si se sabe que el consumo es de 1 millón de euros cuando $I=12$.

- 2) La función de coste marginal para el producto de un fabricante está dada por:

$$\frac{dc}{dq} = 10 - \frac{100}{q+10} \text{ donde } c \text{ es el coste total en euros cuando se producen } q \text{ unidades.}$$

Cuando se producen 100 unidades el coste promedio es de 50 euros la unidad. Con aproximación a la unidad de euro más cercana, determinar el coste fijo del fabricante.

- 3) El coste marginal de la fabricación de un determinado producto viene dado por la función $CMg(x) = 6 - \frac{2}{\sqrt{x}}$. Sabiendo que el coste de funcionamiento es de 84000

euros, hallar la función de coste total de fabricación de dicho producto.

- 4) Se estima que dentro de t meses la población de cierta ciudad cambiará a razón de $4 + 5t^{2/3}$ personas por mes. Si la población actual es de 10.000 personas, ¿cuál es la población dentro de 8 meses?

- 5) Se estima que dentro de t años la población de cierta comunidad a la orilla de un lago cambiará a razón de $0.6t^2 + 0.2t + 0.5$ miles de personas al año. Los

ambientalistas han encontrado que el nivel de contaminación del lago aumenta a razón de, aproximadamente, 5 unidades por 1.000 personas. ¿En cuánto aumentará la contaminación del lago durante los próximos 2 años?

6) Un fabricante manifestó que el coste marginal es $6q + 1$ euros por unidad cuando se producen q unidades. El coste total (incluidos los gastos indirectos) de producir la primera unidad es de 130 euros. ¿Cuál es el coste total de producir las primeras 10 unidades?