

MATRICES

1.- Calcular:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 10 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$f) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$g) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$h) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$i) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$j) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$k) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$l) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$m) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$n) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{n}) \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$o) \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$$

$$p) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$q) \begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}$$

$$r) \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$s) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ -1 & a & 1 & 1 & . & . & 1 \\ -1 & -1 & a & 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -1 & -1 & -1 & -1 & . & . & a \end{vmatrix}$$

$$t) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & n-1 \\ 2 & 3 & 4 & . & . & n \\ 3 & 4 & 5 & . & . & n+1 \\ . & . & . & . & . & . \\ n-2 & n-1 & n & . & . & 2n-2 \\ n-1 & n & n+1 & . & . & 2n-1 \end{vmatrix}$$

2.- Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 4 & x & 6 \\ 5 & 7 & 12 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$.

3.- Demostrar:

a) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = -2(x^3 + y^3)$ b) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = x^2 z^2$

4.- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular $|A - \lambda I_3|$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

5.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, obtener el valor de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+4 & y+4 & z+4 \end{vmatrix}$.

6.- Sean $A, B \in M_4$ con $|A|=3$, $|B|=-2$. Calcular:

a) $|2A|$. b) $|\frac{1}{2}B|$. c) $|BA^t|$.
d) $|(BA)^t|$. e) $|(B^t A^t B)^t|$.

7.- Calcular el rango de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

8.- Calcular, según los valores reales del parámetro a , el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & a \end{pmatrix}$$

9.- Estudiar si las siguientes matrices son inversibles. En caso afirmativo calcular la matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.- Estudiar la existencia de la matriz inversa según los valores de $m \in \mathbb{R}$. Calcular la matriz inversa en los casos que sea posible.

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

11.- Estudiar para qué valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ las siguientes matrices no tienen inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1-m & 2 \\ 3 & 2-m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -m & 5 \\ 2 & 3-m \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2-m & 3 & 1 \\ 1 & 1-m & 4 \\ 0 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} m & 9 & 4 \\ 4 & m & -1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ -1 & 3 & m-1 \end{pmatrix}$$

12.- Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz A que

verifica $P^{-1}AP = B$.

13.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Utiliza la Regla de Cramer para calcular las soluciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x + y - z = 3 \\ 5x - y + 2z = 5 \\ -3x + 3y - 4z = 1 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x + y - 2z + t + 3s = 1 \\ 2x - y + 2z + 2t + 6s = 2 \\ 3x + 2y - 4z - 3t - 9s = 3 \end{cases} \end{array}$$

14.- Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales según los valores reales de los parámetros (m , a y b). Utiliza la Regla de Cramer para calcular las soluciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} mx + y + z = m \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x + y + z = m \\ x + (1+m)y + z = 2m \\ x + y + z = 4 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} x + my - z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} mx + y + 3z = 3 \\ x - y - z = 0 \\ 5x - 3y - 2z = 6 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ x + y + 3z = 4 \\ 5x - y + mz = 10 \end{cases} \\ \text{g) } \begin{cases} -x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + az = b \\ 2x - 2y + 3z = 1 + b \end{cases} & \text{h) } \begin{cases} 2x + ay + z = 7 \\ x + ay + z + t = b \\ x + 2ay + t = -1 \\ bx + ay = b \end{cases} \end{array}$$

15.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 3 & 2 & 4m \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ con $m \in \mathbb{R}$:

- ¿Para que valores del parámetro m , es la matriz A inversible?
- Resolver el sistema lineal $AX = 0_3$ utilizando el apartado anterior.

16.- Considerar las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con a un

parámetro real.

- Discutir en función de a el sistema $AX = B$.
- En los casos que sea posible, calcular las soluciones de $AX = B$.

17.- En un mercado con competencia perfecta las funciones de oferta y demanda de los bienes están dadas por:

$$Q_{1d} = 10 - 2P_1 + 4P_2$$

$$Q_{2d} = 10 + 5P_1 - 3P_2$$

$$Q_{1s} = 20 + 3P_1 - 2P_2$$

$$Q_{2s} = 30 - 7P_1 + 5P_2$$

Donde Q_{id} es la cantidad demandada de bien i , Q_{is} es la cantidad ofertada de bien i y P_i es el precio de mercado del bien i , para $i=1,2$. Calcular los precios para los que el mercado está en equilibrio y la cantidad demanda y ofertada de cada bien en esta situación.

18.- La condición de equilibrio para el precio de tres bienes en un mercado queda determinado por la siguiente condición:

$$11P_1 - P_2 - P_3 = 31$$

$$-P_1 + 6P_2 - 2P_3 = 26$$

$$-P_1 - 2P_2 + 7P_3 = 24$$

Siendo P_1 , P_2 y P_3 los precios de estos tres bienes. Calcular el precio de equilibrio de cada bien.

19.- Considerar los vectores $u = (1, -3, 2)$ y $v = (2, -1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$:

a) Escribir, si es posible, los vectores $(1, 7, -4)$ y $(2, -5, 4)$ como combinación lineal de u y v .

b) ¿Para qué valores de x es el vector $(1, x, 5)$ una combinación lineal de u y v ?

20.- Los vectores $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (2, 1, 3)$ y $v_3 = (5, 2, 10)$ de $\mathbb{R}^3$, ¿son linealmente independientes? En caso de no serlo hallar la relación de dependencia.

21.- Dados los vectores $u_1 = (2, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1)$ y $u_3 = (8, 3, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, estudiar si son linealmente dependientes o independientes.

22.- Dados los vectores $u_1 = (1, 0, -1, 0)$, $u_2 = (2, 0, 3, -1)$, $u_3 = (1, 1, -1, 1)$ y $u_4 = (2, 1, -2, 1)$ de $\mathbb{R}^4$, estudiar si son linealmente independientes. En caso de no serlo hallar la relación de dependencia.

23.- Dados los vectores de $\mathbb{R}^4$ $v_1 = (1, 1, 0, m)$, $v_2 = (3, -1, n, -1)$ y $v_3 = (-3, 5, m, -4)$, determinar los valores que han de tomar los parámetros m y n para que los tres vectores sean linealmente dependientes.

24.- Sean $u = (-1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ y $w = (-1, 1, -1)$ vectores de $\mathbb{R}^3$:

- a) Demostrar que $\{u, v, w\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
- b) Hallar las coordenadas respecto de esta base del vector cuyas coordenadas respecto de la base canónica son 1, 0, 2.
- c) Hallar las coordenadas respecto de la base canónica del vector $a = 3u - v + 5w$.

25.- Sea $A \in M_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de A y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vector propio de A asociado a λ .

Probar que:

- a) $\alpha\lambda$ es valor propio de la matriz αA para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x}$ es vector propio de αA asociado a $\alpha\lambda$.
- b) λ^p es valor propio de A^p y $\mathbf{x}$ es vector propio de A^p asociado a λ^p .
- c) $|A| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ es valor propio de A .
- d) Si A es regular entonces $\lambda \neq 0$. Además, λ^{-1} es valor propio de A^{-1} y $\mathbf{x}$ es vector propio de A^{-1} asociado a λ^{-1} .

26.- Sean $A, B \in M_n$ matrices semejantes. Probar que:

- a) $|A| = |B|$.
- b) A^p es semejante a B^p para cualquier $p \in \mathbb{N}$.
- c) Si A es regular entonces B es regular y A^{-1} es semejante a B^{-1} .

27.- Sea $A \in M_n$. Probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico.

28.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

- a) Estudiar si 3 es o no valor propio de A .
- b) ¿Son los vectores $(1,1,1)$ y $(0,0,1)$ vectores propios de A ? En caso afirmativo, buscar el valor propio asociado.

29.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

- a) Estudiar si el vector $(-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ es o no un vector propio de la matriz A . En caso afirmativo determinar el valor propio asociado.
- b) Lo mismo para el vector $(-1,0,1)$.

30.- Para cada una de las siguientes matrices indicar razonadamente si es diagonalizable o no. Además:

a) En caso afirmativo, dar una matriz semejante diagonal y la matriz regular de paso.

b) En caso negativo, calcular los valores propios y los vectores propios asociados a cada valor propio.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

31.- Una matriz $A \in M_2$ verifica las siguientes condiciones: $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $(2, -1)$ es vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = -2$. Hallar la matriz A indicando si es diagonalizable o no. En caso afirmativo dar una matriz semejante diagonal D y la matriz de paso P tal que $D = P^{-1}AP$.

32.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular los valores de los parámetros a y b para que el vector $(2, -1)$ sea vector propio de A asociado al valor propio 2.

33.- Encontrar una matriz $A \in M_3$ no diagonal de valores propios $-1, 1, 2$ con vectores propios asociados $(1, 0, -1), (-1, 1, 0), (3, -3, 1)$ respectivamente.

34.- Encontrar una matriz $A \in M_3$ no diagonal de valores propios $\lambda_1 = 1$ simple y $\lambda_2 = 2$ doble con vectores propios asociados $(1, 1, 0), (1, 0, 0)$ respectivamente.

35.- Encontrar una matriz $A \in M_3$ con valores propios $\lambda_1 = -1$ doble, $\lambda_2 = 3$ simple y con vectores propios asociados $(1, 0, 2), (-1, 0, 0)$ y $(0, 1, 1)$ respectivamente.

36.- Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular los valores de los parámetros a y b para que

A tenga como valores propios 1 y -1. ¿Es A una matriz diagonalizable?

37.- Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) ¿Para qué valores del parámetro a $\lambda = -2$ es valor propio de A ?

b) ¿Para qué valores del parámetro a es la matriz A diagonalizable?

38.- Determinar una matriz $A \in M_3$ tal que $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que sus vectores propios

sean los vectores de $\mathbb{R}^3$ no nulos de los conjuntos $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, z = 0\}$.

39.- La matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$ admite como vectores propios $(-1, -1, 0)$, $(1, 0, -2)$ y

$(0, -1, 1)$ asociados a los valores propios 3, 0 y $3/2$ respectivamente. Se pide:

a) Hallar los elementos desconocidos de A .

b) ¿Es A diagonalizable?. En caso afirmativo, diagonalizarla.

40.- Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar sus valores y vectores propios. ¿Es A diagonalizable?

b) Comprobar que se cumple que el determinante de la matriz A es el producto de sus valores propios.

41.- Comprobar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ tienen los mismos

valores propios pero sin embargo no son semejantes.

42.- Calcular A^{100} y, en general, A^k , con $k \in \mathbb{N}$, para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

43.- Calcular A^k con $k \in \mathbb{N}$ impar para la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

44.- Calcular $A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ en cada uno de los siguientes casos:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

45.- Calcular una matriz $A \in M_3$ simétrica que verifique: $v=(1,-1,0)$ es vector propio de A ,

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } |A| = 0. \text{ Calcular } A^{50}.$$

46.- Determinar para qué valores de los parámetros $b, c \in \mathbb{R}$ las siguientes matrices son diagonalizables. En los casos que lo sea, encontrar una matriz diagonal semejante a la dada.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & c \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

47.- Para cada una de las siguientes matrices A_i , $i=1,2,3$, encontrar si es posible una matriz regular P y una matriz diagonal D de forma que $D = P^{-1}A_iP$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

48.- El polinomio característico de una matriz A de orden 3 es $P(\lambda) = -\lambda^3 + 21\lambda - 20$. Con estos datos, ¿puedes justificar si A es inversible y/o diagonalizable?

49.- Los valores propios de una cierta matriz $A \in M(n \times n)$ diagonalizable son las raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 - 5\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda + 4$.

a) Determinar los valores propios y su multiplicidad.

b) Determinar la dimensión n de la matriz A y $Rg(A)$.

c) Calcular, si es posible, $|A^{-1}|$ y $\left| -\frac{1}{2}A^{-1} \right|$.

d) Calcular los valores propios de A^2 y su multiplicidad.

50.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Calcular valores y vectores propios de A .
- ¿Es A diagonalizable? En caso afirmativo calcular una matriz semejante diagonal D y una matriz P tal que $D = P^{-1}AP$.
- ¿Existe algún valor del parámetro a para que $(3, -6, a)$ sea vector propio de A ?

51.- Sea A una matriz de orden 3 cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda + 6$:

- Calcular los valores propios de A y el determinante de A .
- Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
 - El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $AX = 0$ es compatible determinado.
 - Existe una matriz D diagonal y una matriz P regular tal que $D = P^{-1}AP$.

52.- Dada una matriz A de orden 4 simétrica cuyos valores propios son 1, 3 y -5 doble:

- Razonar si existe la matriz A^{-1} y, en caso afirmativo, calcule su determinante.
- ¿Cuánto vale el rango de la matriz $A + 5I_4$?

53.- Sea $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ con m número real. Se pide:

- Estudiar la existencia de la matriz inversa de A según los valores del parámetro m . Calcular, cuando sea posible, A^{-1} .
- Determinar los valores del parámetro m para que A sea diagonalizable.
- Calcular el polinomio característico y los valores propios de la matriz A .
- Para $m=0$ calcular una matriz diagonal D y una matriz P tales que $D = P^{-1}AP$.

54.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

- Calcular los valores propios de A .
- Calcular los vectores propios de A .
- ¿Es A diagonalizable? En caso afirmativo, calcular una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que $D = P^{-1}AP$.
- Calcular los valores propios de A^3 .

FORMAS CUADRÁTICAS

1.- Considerar la forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ de matriz asociada

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- Expresar $Q(\mathbf{x})$ en forma polinómica.
- Encontrar, por el método de valores propios, una expresión diagonal para $Q(\mathbf{x})$.
- Clasificar $Q(\mathbf{x})$.

2.- Considerar la forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ de matriz asociada

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- Expresar $Q(\mathbf{x})$ en forma polinómica.
- Encontrar, por formación de cuadrados, una expresión diagonal para $Q(\mathbf{x})$.
- Clasificar $Q(\mathbf{x})$.

3.- Para la forma cuadrática $Q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$ se pide:

- Encontrar una expresión diagonal para Q .
- Clasificar Q .

4.- Para cada una de las siguientes matrices, se pide:

- Encontrar una matriz diagonal congruente con la matriz dada.
- Clasificar la forma cuadrática que representa.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

5.- Clasificar según su signo las siguientes formas cuadráticas:

- a) $Q(x, y) = 3x^2 - 4xy + 7y^2$.
- b) $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$.
- c) $Q(x, y) = 6xy - 2x^2 - 5y^2$.
- d) $Q(x, y) = 4y^2 + 8xy$.
- e) $Q(x, y, z) = y^2 + 2xy + 2yz$.
- f) $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xz + 2xy + 4yz$.
- g) $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xz + 2xy + 2yz$.
- h) $Q(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy$.
- i) $Q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$.
- j) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
- k) $Q(x, y, z) = -4x^2 + y^2 + 3z^2 + 3xz + yz$.
- l) $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2xz + 3y^2 + 2z^2$.
- m) $Q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 3z^2 - 3xy + 4yz - 2xz$.
- n) $Q(x, y, z) = x^2 + 10y^2 + 6xy$.
- o) $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$.
- p) $Q(x, y, z, t) = 2xz - 3yt + 2xt - t^2$.
- q) $Q(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2z^2 + 2xy + 4yz$.
- r) $Q(x, y, z) = 2xy + 4yz - 4xz - x^2 - y^2 + 4z^2$.

6.- Demostrar que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.

7.- Determinar para que valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ las siguientes formas cuadráticas son semidefinidas indicando si es positiva o negativa.

- a) $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + \alpha z^2 - 2xz$.
- b) $Q(x, y, z) = x^2 + \alpha y^2 + \alpha z^2 + 2yz$.

8.- Clasificar según los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ la forma cuadrática de expresión

$$Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\beta yt + 2\beta xz.$$

9.- Estudiar, según los valores del parámetro a , el signo de la forma cuadrática de

matriz asociada $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

10.- Considerar la forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es definida

negativa para algún valor del parámetro a ?

11.- Clasificar las siguientes formas cuadráticas restringidas:

a) $Q(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}xy$ sobre $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - \sqrt{2}y = 0\}$.

b) $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz + 4yz$ para los vectores $x + 2y - z = 0$, $2x - 3y + z = 0$.

c) $Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4xy + 2yz$ para los vectores $x - y + z = 0$.

d) $Q(x, y, z, t) = x^2 - z^2 + 2xz + xt + 2yz$ para los vectores $x + y - z = 0$, $y - t = 0$.

12.- Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ restringida a:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$.

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -z\}$.

13.- Clasificar $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ restringida a:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0\}$.

b) $S = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

14.- Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ sobre el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\}$.

15.- Considerar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = 4x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xz$. Se pide:

a) Encontrar una expresión diagonal para Q .

b) Clasificar Q según su signo.

c) Clasificar Q restringida a $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$.

16.- Considerar la forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde b es un

parámetro real. Se pide:

- Determinar su signo según los valores del parámetro b .
- Determinar su signo restringida a los vectores de la forma $y = 2z$ para cualquier valor de b .

17.- Sea $Q(x, y, z) = y^2 - xy - xz - yz$. Se pide:

- Encontrar una expresión diagonal para Q .
- Clasificar Q .
- Clasificar según los valores del parámetro α Q restringida al subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = \alpha z\}$.

18.- Sea $Q(x, y, z) = 2ax^2 + y^2 + z^2 + 4axz$, con $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

- Clasificar Q según los valores del parámetro a .
- Para $a = -1$, encontrar subconjuntos S_1 y S_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que Q restringida a S_1 sea definida positiva y Q restringida a S_2 sea definida negativa.

19.- Considerando la forma cuadrática $Q(x, y, z)$ representada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \text{ responde razonadamente las siguientes cuestiones:}$$

- ¿La forma cuadrática Q admite la expresión $Q(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = -2\tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 - 5\tilde{z}^2$?
- Justificar si existe algún $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ para el que se verifique que $Q(x_0, y_0, z_0) > 0$.
- Definir, si es posible, un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ en el que la forma cuadrática Q sea definida negativa.

20.- Dada la forma cuadrática $Q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - 4z^2 + 4zy$. Se pide:

- Calcular una expresión diagonal para Q .
- Justificar si existe $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tal que $Q(x_0, y_0, z_0) < 0$.
- Estudiar el signo de Q restringida $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0\}$.

21.- Dada la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xz$:

a) Clasificar $Q(x, y, z)$.

b) ¿Puede ser $Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 + 2\bar{z}^2$ una expresión diagonal de $Q(x, y, z)$? Razonar la respuesta.

22.- Ante lo elevado del déficit público de un país imaginario, el gobierno decide crear un nuevo impuesto T cuyo importe es función de los pagos (o devoluciones en su caso) por el impuesto de las personas físicas, R , y de los pagos por el impuesto del patrimonio, P , de tal manera que $T = 2R^2 + 4P^2 - 4RP$. El gobierno antes de ponerlo en marcha quiere asegurarse de que la recaudación por dicho impuesto será mayor que cero para cada individuo, es decir, no está dispuesto a devolver dinero a ningún contribuyente por este concepto.

Comprobar que el impuesto cumplirá su finalidad recaudadora con todos y cada uno de los contribuyentes.

23.- Los economistas de una empresa aseguran que la función de producción es del tipo:

$P = L^2 + K^2 - 2LK$, siendo L y K el número de trabajadores y de máquinas respectivamente. Además se sabe que para que funcione cada máquina se necesitan dos trabajadores. Comprobar que efectivamente, P es una función de producción.

24.- Un inversionista estima que al invertir en tres valores, A , B y C , la cartera resultante tendrá una rentabilidad de $U(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3$, siendo x_1 , x_2 y x_3 las rentabilidades en el momento de la compra de cada valor A , B y C respectivamente.

a) Analizar si dicha cartera puede generar pérdidas.

b) Valorar cómo afecta a la respuesta anterior una situación económica en que los tres productos partiesen de la misma rentabilidad.

c) Si el inversionista sabe que la rentabilidad del producto A es el doble que la de B , ¿habrá ganancias?

FUNCIONES DE $\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}^m$

Nota: se entenderá $\log x = \log_{10} x$ y $\ln x = \log_e x$

1.- Determinar y representar gráficamente el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 3}}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2 + x + 1}$

f) $f(x) = e^{\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}}$

g) $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$

h) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

i) $f(x) = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

j) $f(x) = \ln(x + 2) + \ln(x - 2)$

k) $f(x, y) = 3x + y$

l) $f(x, y) = \frac{3x + y}{x^2 + 2y^2}$

m) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x - y}}$

n) $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$

o) $f(x, y) = \ln(2x - y + 1)$

p) $f(x, y) = x + \sqrt{y}$

q) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$

r) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

s) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

t) $f(x, y) = \ln(3x^2 + y^2 + 4)$

u) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

v) $f(x, y) = \left(\ln(x + y), \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right)$

2.- Representar gráficamente las curvas de nivel de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x + y$

b) $f(x, y) = (x + y)^2$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2$

d) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

e) $f(x, y) = \sqrt{xy}$

f) $f(x, y) = x^y, x > 0$

g) $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$

h) $f(x, y) = \ln(2x - y + 1)$

i) $f(x, y) = \frac{x + y}{x}$

3.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^3 + 3} - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^x$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{1+2^x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{1}{3+4^x}}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 6x}{3x^2 - 8}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{3x} \right)^x$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4} \right)^{\frac{x^2}{x+1}}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^{-x}}$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x} \right)^x$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{8x-1} \right)^{-x}$

l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{3x^2y}{4x - y + 1}$

m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2}{5x^2 + y^2}$

n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left(x^2 + 5xy - 8, e^{x^2y}, \ln(2x + y) \right)$

4.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3y^2}{7x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

5.- Calcular la primera derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^5$

b) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$

e) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

f) $f(x) = \sqrt{2x-1}$

g) $f(x) = \ln x + \sqrt{x^2 + 1}$

h) $f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln 2$

i) $f(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$

j) $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

k) $f(x) = \ln x \log x - \ln a \log_a x$

l) $f(x) = \frac{3}{56(2x-1)^7} - \frac{1}{24(2x-1)^6} - \frac{1}{40(2x-1)^5}$

m) $f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2^x} + 1 + \ln^5 x$

n) $f(x) = x^2 10^{2x}$

$$o) f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x)$$

$$p) f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

$$q) f(x) = x^4(a - 2x^3)^2$$

$$r) f(x) = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

$$s) f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$$

$$t) f(x) = (2x+1)(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}$$

$$u) f(x) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$$

$$v) f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$$

$$w) f(x) = \operatorname{sen} x^4$$

$$x) f(x) = \cos^4 x$$

$$y) f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos x^6$$

6.- Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

$$a) f(x, y, z) = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$$

$$b) f(x, y) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

$$c) f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$d) f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$$

$$e) f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$$

$$f) f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

$$g) f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$h) f(x, y) = x^y$$

$$i) f(x, y, z) = z^{xy}$$

$$j) f(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$$

$$k) f(x, y) = x^2 \operatorname{sen}^2 y$$

$$l) f(x, y) = \frac{e^{ax}(\operatorname{sen} x + a \cos y)}{a^2 + b^2}$$

7.- Comprobar que $y = xe^{-x}$ verifica la ecuación $x \frac{dy}{dx} = (1-x)y$.

8.- Calcular y' en las siguientes expresiones:

$$a) 2x^2 + 5xy + y^2 = 19$$

$$b) x^2 + y^2 = 25$$

$$c) y = 1 + xe^y$$

$$d) \ln y + e^{-\frac{y}{x}} = 8$$

$$e) \ln y + \frac{x}{y} = 7$$

$$f) x^y = y^x$$

9.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x=1$.

Hallar un valor aproximado de $f(1.1)$.

10.- Calcular los siguientes límites:

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)}{x^2}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x^2}{3x^2}$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\frac{1}{2}x}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\operatorname{sen} x)}{x^2}$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}$ | h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$ | i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$ |
| j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x^3}$ | k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$ | l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x^2}$ |
| m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{1 - e^x}$ | n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos 2x}$ | o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1 + x))}{x \ln(1 + x)}$ |
| p) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$ | q) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ | r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x + 1) - \ln x]$ |
| s) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln x$ | t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ | u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^6)}{x^2}$ |
| v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x^3) e^{-x}$ | | |

11.- Calcular $\nabla f(x, y)$ cuando $f(x, y) = x^2 y + y^3$.

12.- Hallar la matriz jacobiana de las siguientes funciones:

- | | |
|---|----------------------------------|
| a) $f(x) = \ln^2 x$ | b) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$ |
| c) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ | d) $f(t) = (t, e^t, e^{-t})$ |

13.- Calcular $\frac{dz}{dt}$ en las funciones:

- a) $z = 3x + y$, con $x = t^2 + 1$; $y = e^t$.
- b) $z = xy + yu + xu$, con $x = t$; $y = e^{-t}$; $u = \log(t)$.
- c) $z = e^{xy}$, con $x = t \cos t$; $y = t \operatorname{sen} t$.

14.- Calcular $\frac{dz}{du}(1)$ en la función $z = 3x^2 + 2xy - y^2$, con $x = u^2 + 3u$; $y = 2u^2 - u$.

15.- Calcular $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{\partial u}{\partial s}$ en la función $u = z \operatorname{sen} \frac{y}{x}$, con $x = 3r^2 + 2s$; $y = 4r - 2s^3$, $z = 2r^2 - 3s^2$.

16.- Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y evaluarlas en el punto $(x, y) = (0, 1)$, en los siguientes casos:

a) $z = u + v$, con $u = x + e^y$; $v = \log(y) + e^{-x}$.

b) $z = \frac{\operatorname{sen} u}{v}$, con $u = s - t$; $v = s + x$; $s = y^2 - x$; $t = e^y$.

17.- Demostrar que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$, si $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$.

18.- Demostrar que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, si $z = xy + x e^{y/x}$.

19.- Demostrar que se verifica

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + xy \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = xyz,$$

siendo $z = e^y F\left(y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ y F una función real de variable real derivable.

20.- Sea $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$, siendo $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en cualquier punto de la recta real. Si $g'(5) = 3$, calcular $\nabla f(1, 2)$.

21.- Determinar la diferencial de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $y = \ln x$, en 2

b) $y = \frac{x^2}{e^x}$, en 0

c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, en $(1, 1)$

d) $u = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z$, en $(1, 1, 1)$.

e) $z = \ln \frac{2x}{y^2}$, en $(1, e)$

j) $f(x, y) = x^2 e^{\frac{y}{x}}$, en (x, y) con $x \neq 0$

k) $z = (e^{x+y} + y, xy^2)$, en $(0, 0)$

22.- Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$, utilizando el concepto de diferencial, estudiar la variación que experimenta la función al pasar de $x=27$ a $x=26.9$.

23.- Calcular la derivada direccional de las siguientes funciones en la dirección v y en el punto indicados:

a) $f(x,y) = 3 - 2x^2 + y^3$, en la dirección de $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ y en el punto $P=(1,2)$

b) $f(x,y) = x^2 + y + 1$, en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y en el punto $(0,0)$

c) $f(x,y) = \log(x^2 + y^3)$, en la dirección de $v = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ y en el punto $P = (1,3)$

d) $f(x,y,z) = x \operatorname{sen}(yz)$, en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ y en el punto $(1,3,0)$

e) $f(x,y,z) = x \operatorname{sen} y + y \cos z + z \operatorname{sen} x$, en la dirección $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y en el punto $(0,0,0)$

f) $f(x,y,z) = (x^2 + yz^2, \operatorname{sen}(x^2 + y^2))$, en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y en el punto $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, 1)$

24.- Sea $f(x,y)$ una función diferenciable en el punto $(1,2)$. Sabiendo que $f_v(1,2) = 5$ y

$f_w(1,2) = 6$ con $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $w = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, calcular $\nabla f(1,2)$.

25.- Dado el campo vectorial $f(x,y) = (xy, x^2, y^2)$, se pide:

a) Estudiar su diferenciabilidad en el punto $(-1,2)$.

b) En el caso de ser diferenciable, calcular su diferencial en dicho punto.

c) Hallar f_v' en el punto $(-1,2)$ siendo $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

26.- Calcular y'' en $y = \ln(x + \sqrt{4 + x^2})$.

27.- Dada $f(x,y) = x e^{2y-x}$, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

28.- Calcular la matriz hessiana de las siguientes funciones:

- a) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$.
- b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 4\ln x - 10\ln y, x, y > 0$.
- c) $f(x, y) = 9x^2 + y^2 + 6xy + 12x + 4y$.
- d) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.
- e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.
- f) $f(x, y, z) = xyz$.

29.- Si F y G son funciones reales de una variable real con derivadas de segundo orden continuas, demostrar que la función $z = x F\left(\frac{y}{x}\right) + G\left(\frac{y}{x}\right)$, satisface la siguiente ecuación:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

30.- Sabiendo que f y g son funciones reales de una variable real con derivadas de segundo orden y $z = f(x^2 + y^2) + g(x^2 + y^2)$, calcular:

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) - \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) - \frac{1}{x^3} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{y^3} \frac{\partial z}{\partial y}(x, y).$$

31.- Comprobar que $z = \log(x^2 + y^2)$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

32.- Si f es una función real de variable real con derivada segunda, comprobar que la función $z = x f(x + y) + y f(x + y)$ satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

33.- Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones reales de variable real y $h(x, y) = f(y \cdot g(x))$. Suponiendo que existen f'' y g'' en todo $\mathbb{R}$, calcular $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y)$.

34.- Calcular el desarrollo de Taylor hasta el orden 2 de las siguientes funciones en un entorno del punto que se indica:

- a) $f(x) = \ln(1 + x), x = 0$
- b) $f(x) = e^x, x = 0$

$$c) f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x = 0$$

$$d) f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad x = 0$$

$$e) f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x = 0$$

$$f) f(x) = \operatorname{sen} x, \quad x = 0$$

$$g) f(x) = \cos x, \quad x = 0$$

$$h) f(x) = \frac{2x^2 - 3}{(x-1)^2}, \quad x = 0$$

$$i) f(x) = \ln(x - 2x^2), \quad x = \frac{1}{3}$$

$$j) f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad x = 0$$

$$k) f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \quad x = 1$$

$$l) f(x) = \sqrt[3]{6+x}, \quad x = 2$$

$$m) f(x) = (1+x)e^{-x}, \quad x = 0$$

$$n) f(x) = (1+e^x)^3, \quad x = \frac{1}{2}$$

$$o) f(x) = \operatorname{sen}^2 2x, \quad x = 0$$

$$p) f(x) = \ln(2x) - \frac{1}{x-1}, \quad x = 2$$

$$q) f(x) = e^x \ln(1-x), \quad x = 0$$

$$r) f(x) = \ln(9-x^2), \quad x = 0$$

$$s) f(x, y) = e^{2x-3y}, \quad (x, y) = (0, 0)$$

$$t) f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) = (1, 1)$$

$$u) f(x, y, z) = x + yz + e^y, \quad (x, y, z) = (1, 0, 1)$$

35.- Dada la función $f(x, y) = \sqrt{x+y} \ln y$, se considera la ecuación $f(x, y) = 2e$. Se pide:

- Demostrar que la anterior ecuación define a y como función implícita de x en un entorno del punto $(0, e^2)$.
- Calcular $y'(0)$.

36.- Dada la ecuación $e^z \operatorname{sen}(x+y) + e^y \operatorname{sen}(x+z) + e^x \operatorname{sen}(y+z) = 0$, se pide:

- Comprobar que define a z como función implícita de x y de y en un entorno del punto $(\pi, 0, \pi)$.
- Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}(\pi, 0)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(\pi, 0)$.

37.- Probar que la ecuación $x^2 y + xy^2 = 16$ define a y como función implícita de x en un entorno del punto $(2, 2)$. ¿Qué podemos decir del crecimiento de la función $y(x)$ en un entorno de $x=2$?

38.- Considerar la ecuación $3\alpha x^2 - \ln(yz) - \frac{3\alpha x}{yz} = 0$. ¿Para qué valores del parámetro α podemos asegurar que la ecuación anterior define implícitamente la función $x = x(y, z)$ en un entorno del punto $(1, 1, 1)$?

39.- Dada la ecuación $z \operatorname{sen} x - y \operatorname{sen} z = 0$, se pide:

a) Demostrar que define a z como función implícita de (x, y) en un entorno de $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Hallar el polinomio de Taylor de grado 1 en un entorno del punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de la función definida en el apartado a).

40.- Sea $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y) + xy + a^2 y$.

a) ¿Para qué valores de a la ecuación $h(x, y) = 0$ define a y como función implícita de x , $y = \varphi(x)$, en un entorno del punto $(0, 0)$?

b) Calcular $\varphi'(0)$.

c) ¿Define la misma ecuación en un entorno del $(0, 0)$ a x como función implícita de y para algún valor de a ?

d) Sea $F(x, t) = (e^{x+t} + x^2 - 1, e^{\varphi(x)} + t \cos x - 1)$, con $\varphi(x)$ la función implícita anterior. Probar que $JF(0, 0)$ es una matriz regular.

41.- Dada la ecuación $e^{x^2-y^2} + \alpha(x^2 + y^2) = 1 + \alpha$, se pide:

a) ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la ecuación $e^{x^2-y^2} + \alpha(x^2 + y^2) = 1 + \alpha$ define una función implícita $y = y(x)$ en un entorno del punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

b) Para los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, hallados en el apartado anterior, calcular $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

42.- Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = \alpha yz - y \ln(1 + z^2) + z \cos(x + 2y) + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Probar que $f(x, y, z) = 0$ define a z como función implícita de x e y en un entorno de $(\pi, 0, 1)$ para cualquier valor de α .

b) Calcular α para que $\frac{\partial z}{\partial x}(\pi, 0) = 0 = \frac{\partial z}{\partial y}(\pi, 0)$.

43.- Dada la ecuación $xy^2 - yx^2 + z^2 \cos(xz) = 1$:

- Probar que define a $z(x, y)$ como función implícita en un entorno del punto $(0, \sqrt{2}, 1)$.
- Hallar el plano tangente a $z(x, y)$ en el punto $(0, \sqrt{2})$.
- Hallar la derivada direccional de $z(x, y)$ en $(0, \sqrt{2})$ respecto de la dirección $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

44.- Sea $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z, t) = x^3 z + y^3 t^2 - 1$:

- Probar que la ecuación $F(x, y, z, t) = 0$ define a la variable t como función de las variables (x, y, z) en un entorno del punto $(0, 1, 0, 1)$.
- Si $t = \phi(x, y, z)$ es la función del apartado anterior, calcular $\nabla \phi(0, 1, 0)$.

45.- Estudiar si son homogéneas las siguientes funciones indicando el grado de homogeneidad:

a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x}$

b) $f(x, y) = 3x^4 + 4x^2 y^2 + 5y^4$

c) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^3}$

d) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/3}$

f) $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 - 15x - 12y$

g) $f(x, y) = 90x^{1/3}y^{1/3}$

h) $f(x, y) = x^a y^b$

i) $f(x, y, z) = \left(\frac{x^3 y + x^2 y z - 4xz^3}{x - 2y} \right)^5$

j) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2} \ln \frac{y}{z}$

k) $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^2 - y^2} + \sqrt{x + z}$

l) $f(x, y, z) = \sqrt[5]{\frac{x^6 + y^4 x^2 + yz^5}{2z^3}}$

m) $f(x, y, z) = \ln \frac{x - 2y}{y + 3z}$

n) $f(x, y, z) = e^{3x+y} + \sqrt[3]{xz}$

o) $f(x, y, z) = e^{\sqrt{\frac{x^2}{yz}}}$

p) $f(x, y, z) = x \ln \frac{y}{z} + \sqrt{2yz} + 7$

46.- Para las funciones del ejercicio anterior, calcular las derivadas parciales. Comprobar el resultado del teorema de Euler.

47.- Dada $f(x,y) = x^4 y^2 e^{y/x}$, comprobar que $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 6f$. ¿Qué se deduce de la anterior igualdad?

48.- Sea f una función homogénea de grado m , tal que $f(-1,1) = 1$ y $f(-2,2) = 1$. Calcular m .

49.- Sea f una función diferenciable y homogénea de grado 2 con $\frac{\partial f}{\partial x}(3,2) = 3$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(3,2) = 4$. Calcular $f(3,2)$.

50.- De la función $f(x,y,z)$ se sabe que es diferenciable, homogénea de grado 3 y que las componentes de su vector gradiente en el punto $(1,2,3)$ son $(5,2,2)$. ¿Cuál es el valor de la función en el punto $(1,2,3)$?

51.- Sea $z = z(x,y)$ que verifica la ecuación $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$, siendo F una función con derivadas de primer orden, la segunda de ellas no nula. Se pide:

a) Demostrar que $z = z(x,y)$ es homogénea de grado 1.

b) ¿Es homogénea $\frac{\partial z}{\partial x}$? En caso afirmativo, ¿de qué grado? Razona la respuesta.

52.- Sea $f(x,y)$ homogénea de grado 1 con derivadas de segundo orden. Probar que:

$$\frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{xy} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

53.- Sea $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$. Demostrar que:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

54.- Dada la función $f(x,y,z) = e^{\frac{\operatorname{tg} \frac{x^2+y^2+z^2}{xy}}}{xy}$:

a) Comprobar que es homogénea de grado 0.

b) Calcular $x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

55.- Sean $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables y homogéneas de grados 4 y 1, respectivamente. Probar que si $h(x, y, z) = f(x, y, z) \cdot g(x, y, z)$, se verifica:

$$x \frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = 5 h(x, y, z).$$

56.- Sea $f(x, y)$ diferenciable tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1$, $f(1, 1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 1$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 1$, $f(1, 2) = 5$. Decir si f es homogénea y en caso afirmativo de qué grado.

57.- Sea $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$. Se pide:

- Calcular las curvas de nivel de $f(x, y)$ y representarlas gráficamente.
- Calcular $\nabla f(2, 1)$.
- Calcular la derivada direccional de f en el punto $(2, 1)$ según la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.
- Teniendo en cuenta $\begin{cases} x = 2 + \ln t^2 \\ y = e^{t^3 - 1} \end{cases}$, calcular $\frac{df}{dt}(1)$.

58.- Sea la función $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + 2y^2)$. Se pide:

- Calcular el dominio de f .
- Calcular el vector gradiente de f en (x, y) .
- ¿Es la función f diferenciable?
- Calcular la derivada direccional de la función f respecto de la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ en el punto $(1, 1)$.
- ¿Verifica la función f las condiciones del Teorema de Schwarz?
- Utilizando el resultado del apartado anterior, calcular la matriz Hessiana de f en (x, y) .

59.- Sea la función $f(x, y) = \ln\left(\frac{y}{x^2} + 1\right) - 1$.

- a) Determinar las curvas de nivel de la función y representarlas gráficamente.
- b) Calcular $\nabla f(1, 2e)$.
- c) Dado el vector $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, calcular la derivada direccional $f_v(1, 2e)$.
- d) Probar que la curva de nivel 0 de f define implícitamente a la variable y como función de la variable x . Derivando implícitamente calcular $y'(1)$.

60.- Considerar la función de dos variables $f(x, y) = \frac{y}{x + 2y}$.

- a) Determinar su dominio y representarlo gráficamente.
- b) Determinar y representar las curvas de nivel de f .
- c) Probar que no existe el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.
- d) Determinar los pares $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tales que la ecuación $f(x, y) = \frac{b}{a + 2b}$ define a la variable y como función de la variable x en un entorno del punto (a, b) . Para cada uno de los pares anteriores, calcular $y'(a)$ por derivación implícita.

61.- Sea $F(x, y, z) = x^2 z y + e^{xz} - z^2 y + 4y$:

- a) Sin calcular las derivadas parciales, razona si la siguiente igualdad es cierta:

$$x \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 4F(x, y, z).$$

- b) Calcular $\nabla F(0, 2, 1)$.
- c) Calcular la derivada direccional de $F(x, y, z)$ respecto de la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ en el punto $(0, 2, 1)$.
- d) Demuestra que la ecuación $F(x, y, z) = 7$ define a x como función implícita de y, z ($x = f(y, z)$) en un entorno del punto $(0, 2, 1)$.
- e) Calcular $\nabla f(2, 1)$.

- f) Calcular la derivada direccional de $f(y, z)$ respecto de la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ en el punto $(2, 1)$.

62.- Sabiendo que la oferta de un bien en función de su precio p es:

$$S(p) = \begin{cases} \frac{p^2}{20} & \text{si } 0 \leq p < 10 \\ 2p - 15 & \text{si } 10 \leq p \leq 30 \end{cases}$$

- a) Determine el dominio de la función de oferta.
- b) ¿Cuál es la oferta si el precio es de 5 unidades monetarias?

63.- La demanda de un bien en función de su precio viene dada por una función de la forma $D(p) = ap^2 - b$. Determinar los valores de a y de b sabiendo que $D(8) = 1$ y que $\lim_{p \rightarrow 0} D(p) = 5$.

64.- El coste total de producir q unidades de un artículo es $C(q) = 4q^3 - 6q^2 + 18q + 12$.

- a) Calcule el coste de producir 1 unidad.
- b) Si se producen 20 unidades, ¿Cuál es el coste medio de producir cada una de ellas?
- c) Escriba la función de coste medio.
- d) Escriba la función de coste marginal.

65.- El beneficio, $B(p)$, que obtiene una empresa conocido el precio de venta del producto, $p \in [2, 6]$, viene dado por dos segmentos rectilíneos cuyas pendientes son en ambos casos 0'2. Además se sabe que $B(3) = 50$ y que al ir aumentando el precio y pasar de 4 unidades monetarias se pierde una subvención que hace bajar el beneficio en 10 unidades. Escriba y represente esta función de beneficio.

66.- La función de costes según el número de horas trabajadas, x , es de la forma

$$C(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \in [0, 100] \\ c\sqrt{x} & \text{si } x \in (100, 200] \end{cases}. \text{ Determine } a, b, c \text{ sabiendo que } C(x) \text{ es continua,}$$

que la pendiente de la recta tangente en $x = 50$ es 8 y que 121 horas trabajadas suponen un coste igual a 990.

67.- La función de producción de un bien es $Q(K, L) = 8\sqrt[3]{K^2L}$, donde Q es la cantidad de producción, K y L la cantidad de inputs capital y trabajo respectivamente.

Demostrar que la productividad del trabajo es una función de la ratio capital-trabajo (sólo depende de la proporción entre el capital y el trabajo).

68.- Sea la función de producción de una empresa $Q(K,L) = 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{2}{5}}$, donde K es el capital, L el trabajo y Q la producción obtenida.

- Suponiendo que se están utilizando 9 unidades de capital y 32 de trabajo, ¿qué input se deberá aumentar para generar un mayor incremento de la producción, suponiendo que el otro se mantiene constante?
- Suponiendo que se están utilizando 9 unidades de capital y 32 de trabajo, ¿cuál sería aproximadamente la variación de la producción si se incrementa en 2 unidades el capital y en 1 el trabajo?
- Sin realizar las derivadas, calcular la expresión $K \frac{\partial Q}{\partial K}(K,L) + L \frac{\partial Q}{\partial L}(K,L)$.

69.- Una empresa produce dos productos en cantidades q_1 y q_2 respectivamente, siendo sus ingresos $I(q_1, q_2) = q_1 q_2$. Cada uno de los productos tiene una función de producción que depende del capital K y del trabajo L que vienen dadas por:

$$q_1(K,L) = 3K + 2L, \quad q_2(K,L) = 6\sqrt{K^2 L}$$

- Calcular $\frac{\partial I}{\partial K}(K,L), \frac{\partial I}{\partial L}(K,L)$ cuando se utilizan 4 unidades de capital y 9 de trabajo.
- ¿Son homogéneas las funciones de producción?, ¿de qué grado?
- Sin hacer las derivadas, calcular $K \frac{\partial I}{\partial K}(K,L) + L \frac{\partial I}{\partial L}(K,L)$.