

TEMA 1. MATRICES

Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

1.- Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular, si es posible, las siguientes operaciones con matrices:

a) $A \cdot B$ **b)** $B \cdot C$ **c)** $A^t \cdot B$ **d)** $A \cdot B \cdot C$ **e)** $B + C \cdot A^t$

2.- Dadas las matrices $A \in M_{3 \times 2}$, $B \in M_{2 \times 4}$, $C \in M_4$ y $D \in M_{2 \times 1}$:

- a)** Justificar cuáles de estos productos se pueden efectuar: AB , AC , AD , BC , CD .
b) ¿El resultado de alguno de ellos es una matriz cuadrada?

3.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$:

- a)** Comprobar que $A^2 = 2A - I_3$.
b) Usando el resultado anterior, calcular A^4 .

4.- Calcular una matriz X que conmute con la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, esto es, $AX = XA$.

5.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, probar que A^3 es la matriz nula.

6.- Demostrar que la matriz $I_3 + A + A^2$ es la matriz inversa de $I_3 - A$.

7.- En un centro de idiomas, el total de alumnado de inglés, francés y chino se distribuye en cuatro niveles tal como indica la matriz A . Además, estas clases pueden impartirse en aulas con laboratorio de idiomas o sin él. El precio por hora viene dado en la matriz B .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} I & F & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} I \\ II \\ III \\ IV \end{matrix} & \begin{pmatrix} 10 & 12 & 14 \\ 17 & 10 & 12 \\ 15 & 16 & 10 \\ 8 & 12 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} I & II & III & IV \end{matrix} \\ \begin{matrix} Lab \\ No Lab \end{matrix} & \begin{pmatrix} 8 & 8 & 10 & 12 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Utilizando el cálculo matricial, calcular lo que ingresa el centro por hora de clase en cada idioma según sea de aula con laboratorio de idiomas o sin él.

- 8.-** Una asociación de consumidores quiere comparar los precios, en euros, de cuatro productos básicos en tres supermercados distintos y obtiene los siguientes datos (expresados de forma matricial):

$$\begin{matrix} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ S_1 & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ S_2 & \begin{pmatrix} 1,5 & 4,5 & 1,8 & 3,6 \end{pmatrix} \\ S_3 & \begin{pmatrix} 1,2 & 5,4 & 2,2 & 3,5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- 9.-** Para comparar el gasto de una familia según la tienda elegida, consideramos la compra semanal de unidades de cada producto. Las cantidades correspondientes de cada producto son 2, 1, 3 y 4 respectivamente. Comparar el gasto semanal de una familia según la tienda elegida utilizando cálculo matricial.

- 10.-** Calcular:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 10 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 6 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

l) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$

n) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

ñ) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

$$\text{o)} \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$$

$$\text{p)} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$\text{q)} \begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}$$

$$\text{r)} \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$\text{11.- Resolver la ecuación } \begin{vmatrix} 4 & x & 6 \\ 5 & 7 & 12 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

12.- Demostrar:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = -2(x^3 + y^3) \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = x^2 z^2$$

$$\text{13.- Dada } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}:$$

$$\text{a)} \text{ Calcular } |A - \lambda I_3|, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b)} \text{ Resolver la ecuación } |A - \lambda I_3| = 0.$$

$$\text{14.- Dada } A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}:$$

$$\text{a)} \text{ Calcular } |A - \lambda I_4|, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b)} \text{ Resolver la ecuación } |A - \lambda I_4| = 0.$$

$$\text{15.- Sabiendo que } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \text{ obtener el valor de } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+4 & y+4 & z+4 \end{vmatrix}.$$

16.- Sean $A, B \in M_4$ con $|A|=3$, $|B|=-2$. Calcular:

$$\text{a)} |2A|.$$

$$\text{b)} \left| \frac{1}{2}B \right|.$$

$$\text{c)} |BA^t|.$$

d) $|(BA)^t|.$

e) $|(B^t A^t B)^t|.$

f) $|A^{-1}|.$

g) $|(AB)^{-1}|.$

h) $|5B^{-1}|.$

i) $|(2A)^{-1}|.$

17.- Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

18.- Calcular, según los valores reales del parámetro a , el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

19.- Estudiar si las siguientes matrices son invertibles (regulares). En caso afirmativo, calcular la matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

20.- Estudiar la existencia de la matriz inversa según los valores de $m \in \mathbb{R}$. Calcular la matriz inversa en los casos que sea posible.

$$A = \begin{pmatrix} 1-m & 2 \\ 3 & 2-m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -m & 5 \\ 2 & 3-m \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2-m & 3 & 1 \\ 1 & 1-m & 4 \\ 0 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} m & 9 & 4 \\ 4 & m & -1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ -1 & 3 & m-1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

21.- Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

- a) ¿Para qué valores de m existe B^{-1} ?
- b) Para $m = 1$, calcular B^{-1} .
- c) Para $m = 1$, hallar la matriz X tal que $X \cdot B + C = D$.

22.- Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz A que

$$\text{verifica } P^{-1}AP = B.$$

23.- Justificar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) Si A es una matriz 2×2 cuyo rango es 2, su rango no varía si le añadimos una fila o una columna.
- b) Si $X - AX = B$, entonces $X = (I - A)^{-1}B$.
- c) Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, entonces $(A + I)^2 = 6I$.

d) Si $AB = BA$, con A y B dos matrices cuadradas del mismo orden, entonces $(AB)^t = A^t B^t$.

e) Si a una matriz de 3 filas y 3 columnas cuyo rango es 3 le quitamos una fila y una columna, entonces su rango será 2.

f) El rango de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2 - 1 \end{pmatrix}$ es 3 si $k = 0$.

g) Si A es una matriz regular y $(B - C) \cdot A = 0$ (matriz nula), podemos asegurar que $B = C$.

24.- Discutir y resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 5x - y + 2z = 5 \\ -3x + 3y - 4z = 1 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$	c) $\begin{cases} x + y - 2z + t + 3s = 1 \\ 2x - y + 2z + 2t + 6s = 2 \\ 3x + 2y - 4z - 3t - 9s = 3 \end{cases}$
d) $\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$	e) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$	f) $\begin{cases} 8x + 7y + 14z = x \\ -x - y - z = z \\ 4x + 5y + 8z = y \end{cases}$
g) $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 3y + 2z + 4t = 0 \\ 2x + z - t = 0 \end{cases}$	h) $\begin{cases} x + y + 2z + t = 3 \\ x + 3z = -1 \\ 3x + y + 8z + t = 7 \end{cases}$	i) $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \\ x + y - z + t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \end{cases}$

25.- Discutir y resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales según el valor del parámetro que aparece:

a) $\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$	b) $\begin{cases} mx + y + z = m \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$	c) $\begin{cases} x + y + z = m \\ x + (1 + m)y + z = 2m \\ x + y + z = 4 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x + my - z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$	e) $\begin{cases} mx + y + 3z = 3 \\ x - y - z = 0 \\ 5x - 3y - 2z = 6 \end{cases}$	f) $\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ x + y + 3z = 4 \\ 5x - y + mz = 10 \end{cases}$
g) $\begin{cases} 4x + 2y + z = mx \\ 2x + 4y + 2z = my \\ 2x + 4y + 8z = mz \end{cases}$	h) $\begin{cases} 3x + y + az = a - 2 \\ ax - y + z = a - 2 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$	

26.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 3 & 2 & 4m \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ con $m \in \mathbb{R}$:

- a)** ¿Para que valores del parámetro m , es la matriz A invertible (regular)?
- b)** Resolver el sistema lineal $AX = 0_3$ utilizando el apartado anterior.

27.- Considerar las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con a un

parámetro real.

- a)** Discutir en función de a el sistema $AX = B$.
- b)** En los casos que sea posible, calcular las soluciones de $AX = B$.

28.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, discutir y resolver en los casos que sea posible el sistema $AX = 0$.

29.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, razonar si existe alguna matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ no nula que

verifique la siguiente igualdad y, en caso afirmativo, calcularla:

- a)** $AX = X$
- b)** $AX = 3X$

30.- Sean $A, B, C, D \in M(4)$ tales que:

$$\left. \begin{array}{l} |A| + 7|B| + |C| = 0 \\ |A| + |D| = 0 \end{array} \right\}$$

- a)** Probar que el sistema lineal anterior es un sistema compatible indeterminado. Además, si $|A| \neq 0$ entonces $|D| \neq 0$.
- b)** Si $|C| = 3$ y $|D| = 10$, calcular $|2B|$.

31.- En un mercado con competencia perfecta las funciones de oferta y demanda de los bienes están dadas por:

$$Q_{1d} = 10 - 2P_1 + 4P_2$$

$$Q_{2d} = 10 + 5P_1 - 3P_2$$

$$Q_{1s} = 20 + 3P_1 - 2P_2$$

$$Q_{2s} = 30 - 7P_1 + 5P_2$$

Donde Q_{id} es la cantidad demandada de bien i , Q_{is} es la cantidad ofertada de bien i y P_i es el precio de mercado del bien i , para $i=1,2$. Calcular los precios para los que el mercado está en equilibrio y la cantidad demanda y ofertada de cada bien en esta situación.

- 32.-** La condición de equilibrio para el precio de tres bienes en un mercado queda determinada por la siguiente condición:

$$11P_1 - P_2 - P_3 = 31$$

$$-P_1 + 6P_2 - 2P_3 = 26$$

$$-P_1 - 2P_2 + 7P_3 = 24$$

siendo P_1 , P_2 y P_3 los precios de estos tres bienes. Calcular el precio de equilibrio de cada bien.

- 33.-** Para la construcción de un almacén se necesita una unidad de hierro y ninguna de madera. Para la construcción de un piso se necesita una unidad de cada material y para la construcción de una torre se necesitan 4 unidades de hierro y una de madera. Si poseemos una reserva de 14 unidades de hierro y 4 de madera, se pregunta:

a) ¿Cuántos almacenes, pisos y torres podemos construir de forma que utilicemos todas las reservas?

b) Sabiendo que el precio de un almacén es de 1.200.000 €, el de un piso 400.000€ y el de una torre 800.000€, ¿hay alguna combinación que cueste 7.200.000€?

- 34.-** Hallar un número de tres cifras sabiendo que éstas suman 9, que si al número dado se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198, y que la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos.

- 35.-** Dos amigos invierten 20.000€ cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés, una cantidad B al 5% de interés y el resto al 6%. El otro invierte la misma cantidad A al 5%, la B al 6% y el resto al 4%. Determinar las cantidades A, B y C sabiendo que el primero obtiene unos intereses de 1.050€ y el segundo de 950€.

- 36.-** Un cajero automático contiene 95 billetes de 10€, 20€ y 50€ y un total de 2.000€. Si el número de billetes de 10€ es el doble que el número de billetes de 20€, calcular cuántos billetes hay de cada tipo.

- 37.-** Se dispone de tres cajas A, B, C con monedas de 1€. Se sabe que en total hay 36€. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos

cajas. Si se traslada 1 moneda de la caja B a la caja A , ésta tendrá el doble de monedas que B . Averiguar cuántas monedas había en cada caja.

- 38.-** Un especulador adquiere 3 objetos de arte por un precio total de 2 millones de euros. Vendéndolos, espera obtener de ellos ganancias del 20%, del 50% y del 25%, respectivamente, con lo que su beneficio sería de 600.000€. Pero consigue más, pues con la venta obtiene ganancias del 80%, 90% y 85% respectivamente, lo que le da un beneficio total de 1,7 millones de euros. ¿Cuánto le costó cada objeto?
- 39.-** Una empresa dispone de 27.200 euros para actividades de formación de sus cien empleados. Después de estudiar las necesidades de los empleados, se ha decidido organizar tres cursos: A, B, C. La subvención por persona para el curso A es de 400€, para el curso B es de 160€ y de 200€ para el curso C. Si la cantidad que se dedica al curso A es cinco veces mayor que la correspondiente al B, ¿cuántos empleados siguen cada curso?
- 40.-** Un fabricante produce 42 electrodomésticos. La fábrica abastece a 3 tiendas que demandan toda la producción. En una cierta semana, la primera tienda solicitó tantas unidades como la segunda y la tercera juntas, mientras que la segunda tienda pidió un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por la primera tienda más la tercera parte de lo pedido por la tercera. ¿Qué cantidad solicitó cada una?
- 41.-** Una inversionista le afirma a su corredor de bolsa que sus acciones son de tres compañías: Delta Airlines, Hilton Hotels y McDonald's y que hace 2 días su valor bajó 350€ pero que ayer aumentó 600€. El corredor recuerda que hace dos días el precio de las acciones de Delta Airlines bajó 1€ por acción y el de las de Hilton Hotels bajaron 1.5€, pero el precio de las acciones de McDonald's subió 0.5€. También recuerda que ayer el precio de las acciones de Delta subió 1.5€ por acción, el de las de Hilton Hotels bajó otros 0.5€ por acción y las de McDonald's subieron 1€. Demostrar que el corredor no tiene suficiente información para calcular el número de acciones que posee la inversionista en cada compañía, pero que si ella dice que tiene 200 acciones de McDonald's, el corredor puede calcular el número de acciones que tiene en Delta y Hilton.

Diagonalización de matrices cuadradas

- 1.- Considerar los vectores $\bar{u} = (1, -3, 2)$ y $\bar{v} = (2, -1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$:
 - a) Escribir, si es posible, los vectores $(1, 7, -4)$ y $(2, -5, 4)$ como combinación lineal de $\bar{u}$ y $\bar{v}$.
 - b) ¿Para qué valores de x es el vector $(1, x, 5)$ una combinación lineal de $\bar{u}$ y $\bar{v}$?
- 2.- Los vectores $\bar{v}_1 = (1, 1, -1)$, $\bar{v}_2 = (2, 1, 3)$ y $\bar{v}_3 = (5, 2, 10)$ de $\mathbb{R}^3$, ¿son linealmente independientes? En caso de no serlo hallar la relación de dependencia.
- 3.- Dados los vectores $\bar{u}_1 = (2, -1, 0)$, $\bar{u}_2 = (0, 1, -1)$ y $\bar{u}_3 = (8, 3, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, estudiar si son linealmente dependientes o independientes.
- 4.- Dados los vectores de $\mathbb{R}^4$ $\bar{u}_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\bar{u}_2 = (2, 0, 3, -1)$, $\bar{u}_3 = (1, 1, -1, 1)$ y $\bar{u}_4 = (2, 1, -2, 1)$, estudiar si son linealmente independientes. En caso de no serlo hallar la relación de dependencia.
- 5.- Dados los vectores de $\mathbb{R}^4$ $\bar{v}_1 = (1, 1, 0, m)$, $\bar{v}_2 = (3, -1, n, -1)$ y $\bar{v}_3 = (-3, 5, m, -4)$, determinar los valores que han de tomar los parámetros m y n para que los tres vectores sean linealmente dependientes.
- 6.- Sean $\bar{u} = (-1, 0, 0)$, $\bar{v} = (1, 1, 0)$ y $\bar{w} = (-1, 1, -1)$ vectores de $\mathbb{R}^3$:
 - a) Demostrar que $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
 - b) Hallar las coordenadas respecto de esta base del vector cuyas coordenadas respecto de la base canónica son 1, 0, 2.
 - c) Hallar las coordenadas respecto de la base canónica del vector $\bar{a} = 3\bar{u} - 1\bar{v} + 5\bar{w}$.
- 7.- Sea $A \in M_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de A y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ vector propio de A asociado a λ . Probar que:
 - a) λ^p es valor propio de A^p y $\bar{x}$ es vector propio de A^p asociado a λ^p , $\forall p \in \mathbb{N}$
 - b) $|A| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ es valor propio de A .
 - c) Si A es regular entonces $\lambda \neq 0$. Además, λ^{-1} es valor propio de A^{-1} y $\bar{x}$ es vector propio de A^{-1} asociado a λ^{-1} .

8.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, aplicando la definición de valor y vector propio, se

pide:

a) Estudiar si 3 es o no valor propio de A . En caso afirmativo, buscar los vectores propios asociados.

b) ¿Son los vectores $(1,1,1)$ y $(0,0,1)$ vectores propios de A ? En caso afirmativo, buscar el valor propio asociado.

9.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, aplicando la definición de valor y vector propio, se

pide:

a) Estudiar si 1 es o no valor propio de A . En caso afirmativo, buscar los vectores propios asociados.

b) ¿Son los vectores $(0,1,1)$ y $(-1,0,1)$ vectores propios de A ? En caso afirmativo, buscar el valor propio asociado.

10.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular los valores de los parámetros a y b para que el vector $(2,-1)$ sea vector propio de A asociado al valor propio 2.

11.- Para cada una de las siguientes matrices, calcular los valores propios y los vectores propios asociados a cada valor propio.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12.- Para cada una de las matrices del ejercicio anterior, indicar razonadamente si es diagonalizable o no. En caso afirmativo, dar una matriz semejante diagonal, la matriz regular de paso y escribir la relación que hay entre la matriz A_i y estas dos matrices

13.- Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular los valores de los parámetros a y b para que A tenga como valores propios 1 y -1. ¿Es A una matriz diagonalizable?

14.- Una matriz $A \in M_2$ verifica las siguientes condiciones: $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $(2, -1)$ es vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = -2$. Hallar la matriz A indicando si es diagonalizable o no. En caso afirmativo dar una matriz semejante diagonal D y la matriz de paso P tal que $D = P^{-1}AP$.

15.- La matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$ admite como vectores propios $(-1, -1, 0)$, $(1, 0, -2)$ y

$(0, -1, 1)$ asociados a los valores propios 3, 0 y $3/2$ respectivamente. Se pide:

- a)** Hallar los elementos desconocidos de A .
- b)** ¿Es A diagonalizable? En caso afirmativo, diagonalizarla.

16.- Encontrar una matriz $A \in M_3$ no diagonal de valores propios -1, 1, 2 con vectores propios asociados $(1, 0, -1)$, $(-1, 1, 0)$, $(3, -3, 1)$ respectivamente.

17.- Encontrar una matriz $A \in M_3$ que cumple las dos siguientes condiciones:

- $\lambda_1 = -1$ es un valor propio doble con vectores propios asociados los vectores de $\mathbb{R}^3$ no nulos del conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$.
- $\lambda_2 = 3$ es un valor propio simple con vectores propios asociados los vectores de $\mathbb{R}^3$ no nulos del conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, z = 0\}$.

18.- Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

- a)** ¿Para qué valores del parámetro a $\lambda = -2$ es valor propio de A ?
- b)** ¿Para qué valores del parámetro a es la matriz A diagonalizable?

19.- Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- a)** Hallar sus valores y vectores propios. ¿Es A diagonalizable?
b) Comprobar que se cumple que el determinante de la matriz A es el producto de sus valores propios y la traza de la matriz A la suma de sus valores propios.

20.- Calcular $A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

21.- Determinar para qué valores de los parámetros $b, c \in \mathbb{R}$ las siguientes matrices son diagonalizables. En los casos que lo sea, encontrar una matriz diagonal semejante a la dada.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

22.- Para cada una de las siguientes matrices A_i , $i=1,2,3$, encontrar si es posible una matriz regular P y una matriz diagonal D de forma que $D = P^{-1}A_iP$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

23.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ con a un parámetro real:

- a)** ¿Para qué valores de a la matriz A es diagonalizable?
b) Para $a = 1$, encontrar, si es posible, una matriz regular P y una matriz diagonal D de forma que $D = P^{-1}AP$.

24.- El polinomio característico de una matriz A de orden 3 es $P(\lambda) = -\lambda^3 + 21\lambda - 20$. Con estos datos, justificar si A es invertible (regular) y si A es diagonalizable.

25.- El polinomio $P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 - 5\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda + 4$ es el polinomio característico de una matriz cuadrada A .

- a) Determinar la dimensión n de la matriz A .
- b) Determinar los valores propios y su multiplicidad.
- c) Determinar el rango de A .
- d) Calcular, si es posible, $|A^{-1}|$ y $\left|-\frac{1}{2}A^{-1}\right|$.
- e) Calcular los valores propios de A^2 y su multiplicidad.

26.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Calcular valores y vectores propios de A .
- b) ¿Es A diagonalizable? En caso afirmativo calcular una matriz semejante diagonal D y una matriz P tal que $D = P^{-1}AP$.
- c) ¿Existe algún valor del parámetro real a para que $(3, -6, a)$ sea vector propio de A ?

27.- Sea A una matriz de orden 3 cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda + 6$:

- a) Calcular los valores propios de A y el determinante de A .
- b) Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
 - i) El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $AX = 0$ es compatible determinado.
 - ii) Existe una matriz D diagonal y una matriz P regular tal que $D = P^{-1}AP$.

28.- Dada una matriz A de orden 4 simétrica cuyos valores propios son 1, 3 y -5 doble:

- a) Razonar si existe la matriz A^{-1} y, en caso afirmativo, calcular su determinante.
- b) ¿Cuánto vale el rango de la matriz $A + 5I_4$?
- c) Discutir y, si es posible, resolver el sistema $AX = 2X$.

29.- Sea $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ con m número real. Se pide:

- a)** Estudiar la existencia de la matriz inversa de A según los valores del parámetro real m . Calcular, cuando sea posible, A^{-1} .
- b)** Determinar los valores del parámetro m para que A sea diagonalizable.
- c)** Calcular el polinomio característico y los valores propios de la matriz A .
- d)** Para $m=0$ calcular una matriz diagonal D y una matriz P tales que $D = P^{-1}AP$.

30.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a)** Calcular los valores propios de A .
- b)** Calcular los vectores propios de A .
- c)** ¿Es A diagonalizable? En caso afirmativo, calcular una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que $D = P^{-1}AP$.
- d)** Calcular los valores propios y los vectores propios de A^3 .
- e)** ¿Es A^3 diagonalizable? En caso afirmativo, calcular una matriz regular $\hat{P}$ y una matriz diagonal $\hat{D}$ tales que $\hat{D} = \hat{P}^{-1}A\hat{P}$.

31.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$:

- a)** ¿Es $(0, 1, 1)$ un vector propio de A ? En caso afirmativo, calcular sus valores propios asociados.
- b)** Comprobar que A es una matriz diagonalizable.
- c)** Encontrar una semejante diagonal D y una matriz regular de paso P . Indicar la relación entre estas matrices P , A y D .
- d)** Utilizando el apartado anterior, indicar cómo se puede obtener la matriz A^{10} .

32.- Sea una matriz $A \in M_4$ con valores propios 2 (doble), 1 y -1 y cuyos vectores propios asociados son:

- Para $\lambda = 2$ los vectores no nulos de la forma $(a, -b, a, b, 0)$.
- Para $\lambda = 1$ los vectores no nulos de la forma (c, c, c, c) .
- Para $\lambda = -1$ los vectores no nulos de la forma $(0, 0, d, -d)$.

- a)** Determinar la ecuación característica de A .
- b)** Comprobar que A es diagonalizable y dar una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que $D = P^{-1}AP$.

c) Dar todos los valores propios de A^4 y, para cada uno de ellos, los vectores propios asociados.

TEMA 2. FORMAS CUADRÁTICAS REALES

1.- Considerar la forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ de matriz asociada

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Expresar $Q(\mathbf{x})$ en forma polinómica.
- b) Encontrar, por el método de valores propios, una expresión diagonal para $Q(\mathbf{x})$.
- c) Clasificar $Q(\mathbf{x})$.

2.- Considerar la forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ de matriz asociada

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Expresar $Q(\mathbf{x})$ en forma polinómica.
- b) Encontrar, por formación de cuadrados, una expresión diagonal para $Q(\mathbf{x})$.
- c) Clasificar $Q(\mathbf{x})$.

3.- Para la forma cuadrática $Q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$ se pide:

- a) Encontrar una expresión diagonal para Q .
- b) Clasificar Q .

4.- Para cada una de las siguientes matrices, se pide:

- a) Encontrar una matriz diagonal congruente con la matriz dada.
- b) Clasificar la forma cuadrática que representa.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

5.- Clasificar según su signo las siguientes formas cuadráticas:

- a)** $Q(x, y) = 3x^2 - 4xy + 7y^2$.
- b)** $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$.
- c)** $Q(x, y) = 6xy - 2x^2 - 5y^2$.
- d)** $Q(x, y) = 4y^2 + 8xy$.
- e)** $Q(x, y, z) = y^2 + 2xy + 2yz$.
- f)** $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xz + 2xy + 4yz$.
- g)** $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xz + 2xy + 2yz$.
- h)** $Q(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy$.
- i)** $Q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$.
- j)** $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
- k)** $Q(x, y, z) = -4x^2 + y^2 + 3z^2 + 3xz + yz$.
- l)** $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2xz + 3y^2 + 2z^2$.
- m)** $Q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 3z^2 - 3xy + 4yz - 2xz$.
- n)** $Q(x, y, z) = x^2 + 10y^2 + 6xy$.
- o)** $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$.
- p)** $Q(x, y, z, t) = 2xz - 3yt + 2xt - t^2$.
- q)** $Q(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2z^2 + 2xy + 4yz$.
- r)** $Q(x, y, z) = 2xy + 4yz - 4xz - x^2 - y^2 + 4z^2$.

6.- Demostrar que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.

7.- Determinar para que valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ las siguientes formas cuadráticas son semidefinidas indicando si es positiva o negativa.

- a)** $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + \alpha z^2 - 2xz$.

b) $Q(x, y, z) = x^2 + \alpha y^2 + \alpha z^2 + 2yz$.

8.- Clasificar según los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ la forma cuadrática de expresión

$$Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\beta yt + 2\beta xz.$$

9.- Estudiar, según los valores del parámetro a , el signo de la forma cuadrática de

matriz asociada $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

10.- Considerar la forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es definida

negativa para algún valor del parámetro a ?

11.- Clasificar las siguientes formas cuadráticas restringidas:

a) $Q(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}xy$ sobre $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - \sqrt{2}y = 0\}$.

b) $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz + 4yz$ para los vectores $x + 2y - z = 0$, $2x - 3y + z = 0$.

c) $Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4xy + 2yz$ para los vectores $x - y + z = 0$.

d) $Q(x, y, z, t) = x^2 - z^2 + 2xz + xt + 2yz$ para los vectores $x + y - z = 0$, $y - t = 0$.

12.- Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ restringida a:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$.

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -z\}$.

13.- Clasificar $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ restringida a:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0\}$.

b) $S = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

14.- Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ sobre el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\}$.

15.- Considerar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = 4x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xz$. Se pide:

- a) Encontrar una expresión diagonal para Q .
- b) Clasificar Q según su signo.
- c) Clasificar Q restringida a $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$.

16.- Considerar la forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde b es un

parámetro real. Se pide:

- a) Determinar su signo según los valores del parámetro b .
- b) Determinar su signo restringida a los vectores de la forma $y = 2z$ para cualquier valor de b .

17.- Sea $Q(x, y, z) = y^2 - xy - xz - yz$. Se pide:

- a) Encontrar una expresión diagonal para Q .
- b) Clasificar Q .
- c) Clasificar según los valores del parámetro α Q restringida al subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = \alpha z\}$.

18.- Sea $Q(x, y, z) = 2ax^2 + y^2 + z^2 + 4axz$, con $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

- a) Clasificar Q según los valores del parámetro a .
- b) Para $a = -1$, encontrar subconjuntos S_1 y S_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que Q restringida a S_1 sea definida positiva y Q restringida a S_2 sea definida negativa.

19.- Considerando la forma cuadrática $Q(x, y, z)$ representada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \text{ responde razonadamente las siguientes cuestiones:}$$

- a) ¿La forma cuadrática Q admite la expresión $Q(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = -2\tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 - 5\tilde{z}^2$?
- b) Justificar si existe algún $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ para el que se verifique que $Q(x_0, y_0, z_0) > 0$.
- c) Definir, si es posible, un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ en el que la forma cuadrática Q sea definida negativa.

20.- Dada la forma cuadrática $Q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - 4z^2 + 4zy$. Se pide:

- a) Calcular una expresión diagonal para Q .
- b) Justificar si existe $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tal que $Q(x_0, y_0, z_0) < 0$.
- c) Estudiar el signo de Q restringida $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0\}$.

21.- Dada la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xz$:

- a) Clasificar $Q(x, y, z)$.
- b) ¿Puede ser $Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 + 2\bar{z}^2$ una expresión diagonal de $Q(x, y, z)$? Razonar la respuesta.

22.- Ante lo elevado del déficit público de un país imaginario, el gobierno decide crear un nuevo impuesto T cuyo importe es función de los pagos (o devoluciones en su caso) por el impuesto de las personas físicas, R , y de los pagos por el impuesto del patrimonio, P , de tal manera que $T = 2R^2 + 4P^2 - 4RP$. El gobierno antes de ponerlo en marcha quiere asegurarse de que la recaudación por dicho impuesto será mayor que cero para cada individuo, es decir, no está dispuesto a devolver dinero a ningún contribuyente por este concepto.

Comprobar que el impuesto cumplirá su finalidad recaudadora con todos y cada uno de los contribuyentes.

23.- Los economistas de una empresa aseguran que la función de producción es del tipo:

$P = L^2 + K^2 - 2LK$, siendo L y K el número de trabajadores y de máquinas respectivamente. Además se sabe que para que funcione cada máquina se necesitan dos trabajadores. Comprobar que efectivamente, P es una función de producción.

24.- Un inversionista estima que al invertir en tres valores, A , B y C , la cartera resultante tendrá una rentabilidad de $U(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3$, siendo x_1 , x_2 y x_3 las rentabilidades en el momento de la compra de cada valor A , B y C respectivamente.

- a) Analizar si dicha cartera puede generar pérdidas.
- b) Valorar cómo afecta a la respuesta anterior una situación económica en que los tres productos partiesen de la misma rentabilidad.
- c) Si el inversionista sabe que la rentabilidad del producto A es el doble que la de B , ¿habrá ganancias?