# CONJUNTO $\mathbb{R}^n$

**1.-** Considerar los vectores $u = (1, -3, 2)$ y $v = (2, -1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$:

a) Escribir, si es posible, los vectores (1, 7, -4) y (2, -5, 4) como combinación lineal de $u$ y $v$.

b) ¿Para qué valores de $x$ es el vector $(1, x, 5)$ una combinación lineal de $u$ y $v$?

**2.-** Los vectores $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (2,1,3)$ y $v_3 = (5, 2, 10)$ de $\mathbb{R}^3$, ¿son linealmente independientes? En caso de no serlo hallar la relación de dependencia.

**3.-** Dados los vectores $u_1 = (2,-1,0)$, $u_2 = (0,1,-1)$ y $u_3 = (8,3,1)$ de $\mathbb{R}^3$, estudiar si son linealmente dependientes o independientes.

**4.-** Dados los vectores $u_1 = (1,0,-1,0)$, $u_2 = (2,0,3,-1)$, $u_3 = (1,1,-1,1)$ y $u_4 = (2,1,-2,1)$ de $\mathbb{R}^4$, estudiar si son linealmente independientes. En caso de no serlo hallar la relación de dependencia.

**5.-** Dados los vectores de $\mathbb{R}^4$ $v_1 = (1,1,0,m)$, $v_2 = (3,-1,n,-1)$ y $v_3 = (-3,5,m,-4)$, determinar los valores que han de tomar los parámetros $m$ y $n$ para que los tres vectores sean linealmente dependientes.

**6.-** Sean $u = (-1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ y $w = (-1, 1, -1)$ vectores de $\mathbb{R}^3$:

a) Demostrar que $\{u, v, w\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Hallar las coordenadas respecto de esta base del vector cuyas coordenadas respecto de la base canónica son 1, 0, 2.

c) Hallar las coordenadas respecto de la base canónica del vector $a = 3u - v + 5w$.

## MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

**1.-** Calcular, si es posible, los productos $AB$ y $BA$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**2.-** Comprobar que la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

verifica la ecuación $X^2 - 7X + 10I_2 = 0_2$, siendo $0_2 \in M_2$ la matriz nula.

**3.-** Calcular una matriz $C \in M_2$ tal que $AC = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

**4.-** Hallar todas las matrices que conmuten con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**5.-** Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcular $3A^t A - 2I_2$.

b) Resolver la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**6.-** Sea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determinar las condiciones que han de cumplir los parámetros $a$ y $b$ para que la matriz $A$ sea:

a) Regular.

b) Simétrica.

**7.-** Determinar todas las matrices $A \in M_2$ tales que $A^2 = 0_2$.

**8.-** Hallar las matrices $A \in M_2$ tales que:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

**9.-** Dada $A \in M_n$ probar que las matrices $B = A^t A$ y $C = AA^t$ son matrices simétricas.

**10.-** Una matriz $A \in M_n$ se dice *idempotente* si $A^2 = A$. Probar que si $A \in M_n$ es idempotente se tiene:

a) $B = I_n - A$ es idempotente.

b) $AB = BA = 0_n$, con $B$ la matriz del apartado a).

**11.-** Demostrar que si $A \in M_n$ es regular, entonces $A^{-1}$ es también regular. Calcular $\left(A^{-1}\right)^{-1}$.

**12.-** Sean $A,B,C \in M_n$. Si $A$ es regular y $AB = AC$ demostrar que entonces $B=C$. Si $A$ es singular y $AB = AC$, ¿deducimos entonces que $B = C$?. Razonar la respuesta.

**13.-** Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones:

a) El producto de matrices triangulares es triangular.

b) Si $A \in M_n$ es tal que $A^4 = 0_n \Rightarrow A = 0_n$.

c) $A \in M_n \Rightarrow A^t A = AA^t$.

d) Sean $A,B \in M_n$ tales que $AB = 0_n \Rightarrow A = 0_n$ o $B = 0_n$.

e) Sean $A,B \in M_n$ regulares, entonces $A+B$ es regular.

**14.-** Sean $A,B \in M_n$ si $AB = A$ y $BA = B$, entonces $A^2 = A$ y $B^2 = B$.

**15.-** Calcular:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$ l) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 10 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 6 \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ n) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ o) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

p) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ q) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ r) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

s) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ t) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ u) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ -1 & a & 1 & 1 & . & . & 1 \\ -1 & -1 & a & 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -1 & -1 & -1 & -1 & . & . & a \end{vmatrix}$

v) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & n-1 \\ 2 & 3 & 4 & . & . & n \\ 3 & 4 & 5 & . & . & n+1 \\ . & . & . & . & . & . \\ n-2 & n-1 & n & . & . & 2n-2 \\ n-1 & n & n+1 & . & . & 2n-1 \end{vmatrix}$

**16.-** Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 4 & x & 6 \\ 5 & 7 & 12 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$.

**17.-** Demostrar que:

a) $$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = -2(x^3+y^3)$$

b) $$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = x^2z^2$$

**18.-** Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ calcular $\left|A - \lambda I_3\right|$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

**19.-** Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ obtener el valor de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+4 & y+4 & z+4 \end{vmatrix}$.

**20.-** Sean $A, B \in M_4$ con $|A|=3$, $|B|=-2$. Calcular:

a) $|2A|$.

b) $|\frac{1}{2}B|$.

c) $|BA^t|$.

d) $|(BA)^t|$.

e) $|(B^tA^tB)^t|$.

**21.-** Sean $A, B \in M_n$ tales que $AB$ es regular. Probar que entonces $A$ y $B$ son regulares.

**22.-** Sea $A \in M_n$ tal que $A^m = I_n$ para algún $m \in \mathbb{N}$, probar que entonces $A$ es regular. Calcular $A^{-1}$.

**23.-** Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz $A$ que verifica $P^{-1}AP = B$.

**24.-** Dadas $A,B \in M_n$ y $t \in \mathbb{R}$, verificar que:

a) Si $A \neq B$ podemos encontrar $C \in M_n$ tal que $CA = CB$.

b) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA$.

c) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \Leftrightarrow AB = BA$.

d) La matriz $A + A^t$ es simétrica.

e) $|tA| = t^n |A|$.

f) $\exists A,B \ni |A+B| \neq |A| + |B|$.

g) Si $A$ regular $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

**25.-** Estudiar si las siguientes matrices son inversibles. En caso afirmativo calcular la matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**26.-** Estudiar la existencia de la matriz inversa según los valores de $m \in \mathbb{R}$. Calcular la matriz inversa en los casos que sea posible.

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

**27.-** Estudiar para que valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$, las siguientes matrices no tienen inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1-m & 2 \\ 3 & 2-m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -m & 5 \\ 2 & 3-m \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2-m & 3 & 1 \\ 1 & 1-m & 4 \\ 0 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} m & 9 & 4 \\ 4 & m & -1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ -1 & 3 & m-1 \end{pmatrix}$$

**28.-** Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**29.-** Calcular según los valores del parámetro *a*, el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & a \end{pmatrix}$$

**30.-** Resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=3 \\ 5x-y+2z=5 \\ -3x+3y-4z=1 \end{array}\right|$ b) $\left.\begin{array}{l} x+2y=5 \\ x-3y=-5 \\ 3x+y=5 \end{array}\right|$ c) $\left.\begin{array}{r} x+y-2z+t+3s=1 \\ 2x-y+2z+2t+6s=2 \\ 3x+2y-4z-3t-9s=3 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=4 \\ 2x+5y-2z=3 \end{array}\right|$ e) $\left.\begin{array}{r} x+y+2z+t=3 \\ x+3z=5 \\ 3x+y+8z+t=1 \end{array}\right|$ f) $\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=0 \\ x+3y+2z+4t=0 \\ 2x+z-t=0 \end{array}\right|$

g) $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ 2x+y=0 \\ 3x+y-z=0 \end{array}\right|$ h) $\left.\begin{array}{r} x+y+2z+t=5 \\ 2x+3y-z-2t=2 \\ 4x+5y+3z=7 \end{array}\right|$ i) $\left.\begin{array}{l} x-y=0 \\ y+z=1 \\ x+z=0 \\ y-z=1 \end{array}\right|$

j) $\left.\begin{array}{r} x+y+5t=0 \\ x+z+6t=0 \\ y+z+7t=0 \\ x+y+2z+13t=0 \end{array}\right|$

**31.-** Discutir según los valores del parámetro *m* y resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} mx+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x+3y-z=0 \end{array}\right|$ b) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=m \\ x+(1+m)y+z=2m \\ x+y+z=4 \end{array}\right|$ c) $\left.\begin{array}{r} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{r} mx+y+z=m \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{array}\right|$ e) $\left.\begin{array}{r} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{array}\right|$ f) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z=8 \\ 5x+4y+5z=14 \\ 4x+3y+mz=11 \end{array}\right|$

g) $\left.\begin{array}{r} x+my-z=0 \\ 2x-3y-2z=0 \\ x+2y+z=0 \end{array}\right|$ h) $\left.\begin{array}{r} mx+y+3z=3 \\ x-y-z=0 \\ 5x-3y-2z=6 \end{array}\right|$ i) $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-1 \\ x+y+3z=4 \\ 5x-y+mz=10 \end{array}\right|$

j) $\left.\begin{array}{r} 4x+2y+z=mx \\ 2x+4y+2z=my \\ 2x+4y+8z=mz \end{array}\right|$

**32.-** Discutir y resolver cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de los parámetros *a* y *b*:

a) $\left.\begin{array}{r} ax+y=a+2 \\ 3y=6 \\ bx+z=b+3 \end{array}\right|$ b) $\left.\begin{array}{r} -x+2y-2z=0 \\ 2x-y+az=b \\ 2x-2y+3z=1+b \end{array}\right|$ c) $\left.\begin{array}{r} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{r} a^2x+b^2y+z=a^3-b^2+1 \\ ax+by+z=a^2-b+1 \\ x+y+z=a \end{array}\right|$ e) $\left.\begin{array}{r} x+ax=b \\ ax+by=b \\ ax+ay=b \end{array}\right|$ f) $\left.\begin{array}{r} 2x+ay+z=7 \\ x+ay+z+t=b \\ x+2ay+t=-1 \\ bx+ay=b \end{array}\right|$

**33.-** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 3 & 2 & 4m \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ con $m\in\mathbb{R}$:

a) ¿Para que valores del parámetro *m*, es la matriz *A* inversible?.

b) Resolver el sistema lineal $AX=0_3$ utilizando el apartado anterior.

**34.-** Considerar el sistema lineal $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1+a \\ 2+a & 1+2a & 4+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ 3+2a \end{pmatrix}$ con $a\in\mathbb{R}$.

a) Discutir en función del parámetro *a* el sistema anterior.

b) Calcular, cuando sea posible, sus soluciones.

**35.-** Considerar el sistema lineal $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & 2\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutir el sistema anterior y resolverlo cuando sea posible.

**36.-** Considerar las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $a$ un parámetro real.

a) Discutir en función de $a$ el sistema $AX = B$.

b) En los casos que sea posible, calcular las soluciones de $AX = B$.

**37.-** En un mercado con competencia perfecta las funciones de oferta y demanda de los bienes están dadas por:

$$Q_{1d} = 10 - 2P_1 + 4P_2 \qquad Q_{2d} = 10 + 5P_1 - 3P_2$$

$$Q_{1s} = 20 + 3P_1 - 2P_2 \qquad Q_{2s} = 30 - 7P_1 + 5P_2$$

Donde $Q_{id}$ es la cantidad demandada de bien *i*, $Q_{is}$ es la cantidad ofertada de bien *i* y $P_i$ es el precio de mercado del bien *i*, para *i*=1,2. Calcular los precios para los que el mercado está en equilibrio y la cantidad demanda y ofertada de cada bien en esta situación.

**38.-** La condición de equilibrio para el precio de tres bienes en un mercado queda determinado por la siguiente condición:

$$\begin{aligned} 11P_1 - P_2 - P_3 &= 31 \\ -P_1 + 6P_2 - 2P_3 &= 26 \\ -P_1 - 2P_2 + 7P_3 &= 24 \end{aligned}$$

Siendo $P_1$, $P_2$ y $P_3$ los precios de estos tres bienes. Calcular el precio de equilibrio de cada bien.

**39.-** Para la construcción de un almacén se necesita una unidad de hierro y ninguna de madera. Para la construcción de un piso se necesita una unidad de cada material y para la construcción de una torre se necesitan 4 unidades de hierro y una de madera. Si poseemos una reserva de 14 unidades de hierro y 4 de madera, se pregunta:

a) ¿Cuántos almacenes, pisos y torres podemos construir de forma que utilicemos todas las reservas?

b) Sabiendo que el precio de un almacén es de 1.200.000 €, el de un piso 400.000€ y el de una torre 800.000€, ¿hay alguna combinación que cueste 7.200.000€?

**40.-** Halla un número de tres cifras sabiendo que éstas suman 9, que si al número dado se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198, y que la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos.

**41.-** Dos amigos invierten 20.000€ cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés, una cantidad B al 5% de interés y el resto al 6%. El otro invierte la misma cantidad A al 5%, la B al 6% y el resto al 4%. Determina las cantidades A, B y C sabiendo que el primero obtiene unos intereses de 1.050€ y el segundo de 950€.

**42.-** Un cajero automático contiene 95 billetes de 10€, 20€ y 50€ y un total de 2.000€. Si el número de billetes de 10€ es el doble que el número de billetes de 20€, calcular cuantos billetes hay de cada tipo.

**43.-** Se dispone de tres cajas *A*, *B, C* con monedas de 1€. Se sabe que en total hay 36€. El número de monedas de *A* excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada 1 moneda de la caja *B* a la caja *A*, ésta tendrá el doble de monedas que *B*. Averigua cuántas monedas había en cada caja.

**44.-** Un especulador adquiere 3 objetos de arte por un precio total de 2 millones de euros. Vendiéndolos, espera obtener de ellos ganancias del 20%, del 50% y del 25%, respectivamente, con lo que su beneficio sería de 600.000€. Pero consigue más, pues con la venta obtiene ganancias del 80%, 90% y 85% respectivamente, lo que le da un beneficio total de 1,7 millones de euros. ¿Cuánto le costó cada objeto?

**45.-** Una empresa dispone de 27.200 euros para actividades de formación de sus cien empleados. Después de estudiar las necesidades de los empleados, se ha decidido organizar tres cursos: A, B, C. La subvención por persona para el curso A es de 400€, para el curso B es de 160€ y de 200€ para el curso C. Si la cantidad que se dedica al curso A es cinco veces mayor que la correspondiente al B, ¿cuántos empleados siguen cada curso?

**46.-** Un fabricante produce 42 electrodomésticos. La fábrica abastece a 3 tiendas que demandan toda la producción. En una cierta semana, la primera tienda solicitó tantas unidades como la segunda y la tercera juntas, mientras que la segunda tienda pidió un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por la primera tienda más la tercera parte de lo pedido por la tercera. ¿Qué cantidad solicitó cada una?

**47.-** Una inversionista le afirma a su corredor de bolsa que sus acciones son de tres compañías: Delta Airlines, Hilton Hotels y McDonald's y que hace 2 días su valor bajó 350€ pero que ayer aumentó 600€. El corredor recuerda que hace dos días el precio de las acciones de Delta Airlines bajó 1€ por acción y el de las de Hilton Hotels bajaron 1.5€, pero el precio de las acciones de McDonald's subió 0.5€. También recuerda que ayer el precio de las acciones de Delta subió 1.5€ por acción, el de las de Hilton Hotels bajó otros 0.5€ por acción y las de McDonald's subieron 1€. Demuestre que el corredor no tiene suficiente información para calcular el número de acciones que posee la inversionista en cada compañía, pero que si ella dice que tiene 200 acciones de McDonald's, el corredor puede calcular el número de acciones que tiene en Delta y Hilton.

## DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CUADRADAS

**1.-** Sea $A \in M_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de $A$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vector propio de $A$ asociado a $\lambda$. Probar que:

a) $\alpha\lambda$ es valor propio de la matriz $\alpha A$ para cualquier $\alpha \in R$ y $\mathbf{x}$ es vector propio de $\alpha A$ asociado a $\alpha\lambda$.

b) $\lambda^p$ es valor propio de $A^p$ y $\mathbf{x}$ es vector propio de $A^p$ asociado a $\lambda^p$, con $p \in \mathbb{N}$.

c) $|A| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ es valor propio de $A$.

d) Si $A$ es regular entonces $\lambda \neq 0$, además $\lambda^{-1}$ es valor propio de $A^{-1}$ y $\mathbf{x}$ es vector propio de $A^{-1}$ asociado a $\lambda^{-1}$.

**2.**- Sean $A, B \in M_n$ matrices semejantes. Probar que:

a) $|A| = |B|$.

b) $A^p$ es semejante a $B^p$ para cualquier $p \in \mathbb{N}$.

c) Si $A$ es regular entonces $B$ es regular y $A^{-1}$ es semejante a $B^{-1}$.

**3.-** Sea $A \in M_n$. Probar que $A$ y $A^t$ tienen el mismo polinomio característico.

**4.-** a) Sean $A, B \in M_n$ matrices regulares. Probar que las matrices $AB$ y $BA$ tienen los mismos valores propios.

b) Sea $A \in M_n$ una matriz idempotente ($A^2 = A$). Probar que $A$ sólo puede tener como valores propios los valores 0 y 1.

**5.-** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Estudiar si 3 es o no valor propio de $A$.

b) ¿Son los vectores (1,1,1) y (0,0,1) vectores propios de $A$? En caso afirmativo, buscar el valor propio asociado.

**6.-** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Estudiar si el vector $(-1,\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ es o no un vector propio de la matriz $A$. En caso afirmativo determinar el valor propio asociado.

b) Lo mismo para el vector (-1,0,1).

**7.-** Para cada una de las siguientes matrices indicar razonadamente si es diagonalizable o no. Además:

a) En caso afirmativo, dar una matriz semejante diagonal y la matriz regular de paso.

b) En caso negativo, calcular los valores propios y los vectores propios asociados a cada valor propio.

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad A_2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_5=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_6=\begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_7=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad A_8=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_9=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

**8.-** Una matriz $A \in M_2$ verifica las siguientes condiciones: $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y (2,-1) es vector propio de $A$ asociado al valor propio $\lambda=-2$. Hallar la matriz $A$ indicando si es diagonalizable o no. En caso afirmativo dar una matriz semejante diagonal $D$ y la matriz de paso $P$ tal que $D=P^{-1}AP$.

**9.-** Calcular una matriz $A \in M_3$ simétrica que verifique: $v$=(1,-1,0) es vector propio de $A$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $|A|$ =0. Calcular $A^{50}$.

**10.-** Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ con $a,b \in \mathbb{R}$. Calcular los valores de los parámetros $a$ y $b$ para que el vector (2,-1) sea vector propio de $A$ asociado al valor propio 2.

**11.-** Encontrar una matriz $A \in M_3$ de valores propios -1, 1, 2 con vectores propios asociados (1,0,-1), (-1,1,0), (3,-3,1) respectivamente.

**12.-** Encontrar una matriz $A \in M_3$ de valores propios $\lambda_1 = 1$ simple y $\lambda_2 = 2$ doble con vectores propios asociados (1,1,0), (1,0,0) respectivamente .

**13.-** Encontrar una matriz $A \in M_3$ con valores propios $\lambda_1 = -1$ doble, $\lambda_2 = 3$ simple y con vectores propios asociados (1,0,2), (-1,0,0) y (0,1,1) respectivamente.

**14.-** Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular los valores de los parámetros *a* y *b* para que *A* tenga como valores propios 1 y -1. ¿Es *A* una matriz diagonalizable?.

**15.-** Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) ¿Para qué valores del parámetro *a* $\lambda = -2$ es valor propio de *A*?.
b) ¿Para qué valores del parámetro *a* es la matriz *A* diagonalizable?.

**16.-** Determinar una matriz $A \in M_3$ tal que $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que sus vectores propios sean los vectores de $\mathbb{R}^3$ no nulos de los conjuntos $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, z = 0\}$.

**17.-** La matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$ admite como vectores propios (-1,-1,0), (1,0,-2) y $(0,-1,1)$ asociados a los valores propios 3, 0 y 3/2 respectivamente. Se pide:

a) Hallar los elementos desconocidos de *A*.
b) ¿Es *A* diagonalizable?. En caso afirmativo, diagonalizarla.

**18.-** Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar sus valores y vectores propios. ¿Es *A* diagonalizable?.

b) Comprobar que se cumple que el determinante de la matriz $A$ es el producto de sus valores propios.

**19.-** Comprobar que las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ tienen los mismos valores propios pero sin embargo no son semejantes.

**20.-** Calcular $A^{100}$ y, en general, $A^k$, con $k \in \mathbb{N}$, para la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

**21.-** Calcular $A^k$ con $k \in \mathbb{N}$ impar para la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

**22.-** Calcular $A^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

**23.-** Determinar para qué valores de los parámetros $b, c \in \mathbb{R}$ las siguientes matrices son diagonalizables. En los casos que lo sea, encontrar una matriz diagonal semejante a la dada.

$A_1=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & c \end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A_3=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**24.-** Para cada una de las siguientes matrices $A_i$, i=1,2,3, encontrar si es posible una matriz regular $P$ y una matriz diagonal $D$ de forma que $D=P^{-1}A_iP$.

$A_1=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_3=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

## FORMAS CUADRÁTICAS

**1.-** Dada la forma cuadrática $Q(x,y,z) = 2x^2 - y^2 + 2xz$, encontrar la expresión matricial que se obtiene al realizar el cambio de variables $x = 2x' - y' - z'$, $y = -y' + z'$, $z = 2x' + y'$.

**2.-** Considerar la forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ de matriz asociada

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Expresar $Q(\mathbf{x})$ en forma polinómica.

b) Encontrar, por el método de valores propios, una expresión diagonal para $Q(\mathbf{x})$.

c) Clasificar $Q(\mathbf{x})$.

**3.-** Considerar la forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ de matriz asociada

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Expresar $Q(\mathbf{x})$ en forma polinómica.

b) Encontrar, por formación de cuadrados, una expresión diagonal para $Q(\mathbf{x})$.

c) Clasificar $Q(\mathbf{x})$.

**4.-** Para la forma cuadrática $Q(x,y,z) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$ se pide:

a) Encontrar una expresión diagonal para $Q$.

b) Clasificar $Q$.

**5.-** Para cada una de las siguientes matrices, se pide:

a) Encontrar una matriz diagonal congruente con la matriz dada.

b) Clasificar la forma cuadrática que representa.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**6.-** Clasificar según su signo las siguientes formas cuadráticas:

a) $Q(x, y) = 3x^2 - 4xy + 7y^2$ .

b) $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$ .

c) $Q(x, y) = 6xy - 2x^2 - 5y^2$.

d) $Q(x, y) = 4y^2 + 8xy$ .

e) $Q(x, y) = 4xy$ .

f) $Q(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$ .

g) $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xz + 2xy + 2yz$ .

h) $Q(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy$ .

i) $Q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$ .

j) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

k) $Q(x, y, z) = -4x^2 + y^2 + 3z^2 + 3xz + yz$ .

l) $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2xz + 3y^2 + 2z^2$.

m) $Q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 3z^2 - 3xy + 4yz - 2xz$ .

n) $Q(x, y, z) = x^2 + 10y^2 + 6xy$ .

o) $Q(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz$ .

p) $Q(x, y, z, t) = 2xz - 3yt + 2xt - t^2$ .

q) $Q(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2z^2 + 2xy + 4yz$ .

r) $Q(x, y, z) = 2xy + 4yz - 4xz - x^2 - y^2 + 4z^2$ .

**7.-** Demostrar que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$ .

**8.-** Determinar para que valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ las siguientes formas cuadráticas son semidefinidas indicando si es positiva o negativa.

a) $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + \alpha z^2 - 2xz$ .

b) $Q(x, y, z) = x^2 + \alpha y^2 + \alpha z^2 + 2yz$ .

**9.-** Expresar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = (3-\beta)x^2 - y^2 - 4z^2 + 2xy + 10xz + 2yz$ como una suma de cuadrados y clasificarla según los valores de $\beta \in \mathbb{R}$.

**10.-** Clasificar según los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ la forma cuadrática de expresión $Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\beta yt + 2\beta xz$.

**11.-** Estudiar, según los valores del parámetro *a*, el signo de la forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

**12.-** Considerar la forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es definida negativa para algún valor del parámetro *a*?.

**13.-** Clasificar las siguientes formas cuadráticas restringidas:

a) $Q(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}xy$ sobre $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - \sqrt{2}y = 0\}$.

b) $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz + 4yz$ para los vectores $x + 2y - z = 0$, $2x - 3y + z = 0$.

c) $Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4xy + 2yz$ para los vectores $x - y + z = 0$.

d) $Q(x, y, z, t) = x^2 - z^2 + 2xz + xt + 2yz$ para los vectores $x + y - z = 0,\ y - t = 0$.

**14.-** Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ restringida a:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$.

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -z\}$.

**15.-** Clasificar $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ restringida a:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0\}$.

b) $S = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

**16.-** Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ sobre el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\}$.

**17.-** Considerar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = 4x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xz$. Se pide:

a) Encontrar una expresión diagonal para $Q$.

b) Clasificar $Q$ según su signo.

c) Clasificar $Q$ restringida a $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$.

**18.-** Considerar la forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $b$ es un parámetro real. Se pide:

a) Determinar su signo según los valores del parámetro $b$.

b) Determinar su signo restringida a los vectores de la forma $y = 2z$ para cualquier valor de $b$.

**19.-** Sea $Q(x, y, z) = y^2 - xy - xz - yz$. Se pide:

a) Encontrar una expresión diagonal para $Q$.

b) Clasificar $Q$.

c) Clasificar según los valores del parámetro $\alpha$ $Q$ restringida al subconjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = \alpha z\}$.

**20.-** Sea $Q(x, y, z) = 2ax^2 + y^2 + z^2 + 4axz$, con $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

a) Clasificar $Q$ según los valores del parámetro $a$.

b) Para $a$ = -1, encontrar subconjuntos $S_1$ y $S_2$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $Q$ restringida a $S_1$ sea definida positiva y $Q$ restringida a $S_2$ sea definida negativa.

**21.-** Sea $A \in M_n$ simétrica y $Q(\mathbf{x}) = X^t A X$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la forma cuadrática asociada. Se pide:

a) Probar que $Q(\mathbf{x})$ y $Q(\lambda\mathbf{x})$ tienen el mismo signo $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \neq 0$.

b) ¿Para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que $Q(\mathbf{x}) = Q(\lambda\mathbf{x})$?.

c) Concluir utilizando a) y b) que $Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{y})$ en general, no es cierto.

d) Si $A' \in M_n$ es una matriz simétrica y $Q'(\mathbf{x}) = X^t A' X$ es la forma cuadrática asociada, ¿cuál es la matriz asociada a la forma cuadrática $(Q + Q')(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) + Q'(\mathbf{x})$?.

**22.-** Sea $A \in M_n$ una matriz simétrica tal que su forma cuadrática asociada es definida positiva. Si $B \in M_n$, probar que:

a) Si *B* es regular entonces la forma cuadrática de matriz asociada $B^t AB$ es definida positiva.

b) Si B es no regular entonces la forma cuadrática de matriz asociada $B^t AB$ es semidefinida positiva.

**23.-** Sea $A \in M_n$ simétrica y $Q(\mathbf{x}) = X^t AX$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la forma cuadrática asociada. Probar que si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes entonces $Q(\mathbf{x})Q(\mathbf{y}) \geq 0$.

**24.-** Sean $A, B \in M_n$ matrices simétricas. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si las formas cuadráticas de matrices asociadas *A* y *B*, son definidas positivas entonces la forma cuadrática de matriz asociada *A+B* es definida positiva.

b) Si la forma cuadrática de matriz asociada *A* es definida positiva y la forma cuadrática de matriz asociada *B* es definida negativa, entonces la forma cuadrática de matriz asociada *A+B* es indefinida.

c) Si la forma cuadrática de matriz asociada *A* es definida positiva y la forma cuadrática de matriz asociada *B* es definida negativa, entonces la forma cuadrática de matriz asociada *A+B* es semidefinida positiva o semidefinida negativa.

d) Si las formas cuadráticas de matrices asociadas *A* y *B*, son semidefinidas positivas entonces la forma cuadrática de matriz asociada *A+B* es semidefinida positiva.

e) Si las formas cuadráticas de matrices asociadas *A* y *B*, son definidas negativas, entonces la forma cuadrática de matriz asociada *A-B* es definida negativa.

f) Si la forma cuadrática de matriz asociada *A* es definida positiva entonces la matriz *A* es regular.

**25.-** Ante lo elevado del déficit público de un pais imaginario, el gobierno decide crear un nuevo impuesto *T* cuyo importe es función de los pagos (o devoluciones en su caso) por el impuesto de las personas físicas, *R*, y de los pagos por el impuesto del patrimonio, *P*, de tal manera que $T = 2R^2 + 4P^2 - 4RP$. El gobierno antes de ponerlo en marcha quiere asegurarse de que la recaudación por dicho impuesto será mayor que cero para cada individuo, es decir, no está dispuesto a devolver dinero a ningún contribuyente por este concepto.

Comprobar que el impuesto cumplirá su finalidad recaudadora con todos y cada uno de los contribuyentes.

**26.-** Los economistas de una empresa aseguran que la función de producción es del tipo: $P = L^2 + K^2 - 2LK$, siendo $L$ y $K$ el número de trabajadores y de máquinas respectivamente. Además se sabe que para que funcione cada máquina se necesitan dos trabajadores. Comprobar que efectivamente, $P$ es una función de producción.

## FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Nota: se entenderá $logx = log_{10}x$ y $lnx = log_e x$

**1.-** Hallar el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-16}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2+x+1}$ f) $f(x)=e^{\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}}$

g) $f(x)=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$ h) $f(x)=ln(x^2-4)$ i) $f(x)=ln\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

j) $f(x)=ln(x+2)+ln(x-2)$

**2.-** Calcular la primera derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^5$ b) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ d) $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$

e) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ f) $f(x)=\sqrt{2x-1}$

g) $f(x)=lnx+\sqrt{x^2+1}$ h) $f(x)=\dfrac{\pi}{x}+ln2$

i) $f(x)=\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x}$ j) $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

k) $f(x)=lnx\ logx-lna\ log_a x$ l) $f(x)=\dfrac{3}{56(2x-1)^7}-\dfrac{1}{24(2x-1)^6}-\dfrac{1}{40(2x-1)^5}$

m) $f(x)=\sqrt[3]{2e^x-2^x+1}+ln^5x$ n) $f(x)=x^2\,10^{2x}$

o) $f(x)=ln^2x-ln(lnx)$ p) $f(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{2}ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

q) $f(x)=x^4(a-2x^3)^2$ r) $f(x)=\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$

s) $f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$ t) $f(x)=(2x+1)(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}$

u) $f(x)=\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$ v) $f(x)=ln(senx)$

w) $f(x) = senx^4$ x) $f(x) = cos^4 x$

y) $f(x) = sen^2 x \; cosx^6$

**3.-** Comprobar que $y = xe^{-x}$ verifica la ecuación $x\dfrac{dy}{dx} = (1-x)y$.

**4.-** Calcular y'' en $y = ln(x + \sqrt{4 + x^2})$.

**5.-** Calcular $y'$ en las siguientes expresiones:

a) $2x^2 + 5xy + y^2 = 19$ b) $x^2 + y^2 = 25$ c) $y = 1 + xe^y$

d) $lny + e^{-\frac{y}{x}} = 8$ e) $lny + \dfrac{x}{y} = 7$ f) $x^y = y^x$

**6.-** Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x$=1. Hallar un valor aproximado de $f$(1'1).

**7.-** Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$, utilizando el concepto de diferencial, estudiar la variación que experimenta la función al pasar de $x$=27 a $x$=26'9.

**8.-** Demostrar que la función polinómica $f(x) = x^5 - 4x^3 - 1$ tiene una raíz en el intervalo (-1,0).

**9.-** Demostrar que existe algún número real que verifica la igualdad $2x - 1 = cosx$.

**10.-** a) Demostrar, aplicando el Teorema de Bolzano, que existe un número real $x_0 \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ para el cual $lnx_0 + x_0 = 0$. (Ayuda: $ln\dfrac{1}{2} < -\dfrac{1}{2}$)

b) Aplicar el resultado anterior para estudiar si existe algún extremo local para la función $f(x) = x\; lnx - x + \dfrac{1}{2}x^2$.

**11.-** a) Probar que la función $f(x) = e^{x-1} - \dfrac{1}{1+x}$ se anula en algún punto del intervalo (0, 1).

b) Demostrar que la función $g(x) = e^{x-1} - ln(1+x)$ alcanza un mínimo local en el intervalo (0, 1).

**12.-** La función $f(x) = tg\,x$ cumple $tg(\pi/4) = 1$ y $tg(3\pi/4) = -1$, sin embargo no existe $c \in (\pi/4, 3\pi/4)$ tal que $tg\,c = 0$. Razonar que esto no contradice el Teorema de Bolzano.

**13.-** Determinar los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los que la función $f(x) = x^3 - 3x + m$ se anula en algún punto del intervalo $(-1,1)$.

**14.-** Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 34$

**15.-** Hallar los extremos relativos de:

a) $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{8}(-4x^3 + 2x^2 - 2x - 1)$   b) $f(x) = \dfrac{x^4}{x-1}$

**16**.- Que se ha de verificar para que la función $f(x) = (x-a)^4(x+b)$ alcance un mínimo en $x = a$?

**17.-** Hállense los valores de $a$ y $b$ para que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx$ alcance un máximo en el punto (3,9).

**18.-** Calcular para cada una de las siguientes funciones, los máximos y mínimos locales y globales en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = x(x-1)$ en el intervalo [0,1]

b) $f(x) = -x(x-1)$ en el intervalo [0,2]

c) $f(x) = lnx$ en el intervalo [1,e]

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en el intervalo [-2,-1]

e) $f(x) = senx + cosx$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

**19.-** Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x}$:

a) Estudiar el crecimiento de la función en su dominio de definición.

b) Estudiar la existencia de extremos relativos de la función en su dominio de definición y en su caso calcularlos.

c) Estudiar la concavidad y la convexidad de la función en su dominio de definición.

d) Estudiar la existencia de puntos de inflexión de la función en su dominio de definición y en su caso calcularlos.

**20.-** Sea la función $f(x)=\dfrac{lnx}{x}$:

a) Determinar el dominio de definición de la función.

b) Estudiar la existencia de extremos relativos de la función en su dominio de definición y en su caso calcularlos.

**21.-** Dada la función $f(x)=e^{bx^2}$, $b\in\mathbb{R}$, hallar los extremos relativos de la función en su dominio de definición señalando si son máximos o mínimos según los valores del parámetro *b*.

**22.-** Calcular el desarrollo de Taylor en un entorno de $x = 0$ de las siguientes funciones:

a) $f(x)=ln(1+x)$ b) $f(x)=e^x$ c) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ e) $f(x)=\sqrt{1+x}$ f) $f(x)=senx$

g) $f(x)=cosx$

**23**.- Dada $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, comparar $f(10)$ y $f\left(\dfrac{1}{10}\right)$ con los valores aproximados que se obtienen con el desarrollo de Taylor hasta el orden 3 en un entorno de $x = 0$ de esta función. Utilizar para ello el desarrollo obtenido en el apartado c) del problema anterior.

**24.-** Calcular el desarrollo de Taylor en un entorno de $x=1$ de la función $f(x)=lnx$.

**25.-** Calcular el desarrollo de Taylor hasta el orden 3 de las siguientes funciones en un entorno del punto que se indica.

a) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{(x-1)^2}$, $x=0$ b) $f(x)=ln(x-2x^2)$, $x=\dfrac{1}{3}$

c) $f(x)=ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $x=0$ d) $f(x)=ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $x=1$

e) $f(x)=\sqrt[3]{6+x}$, $x=2$ f) $f(x)=(1+x)e^{-x}$, $x=0$

g) $f(x)=(1+e^x)^3$, $x=\dfrac{1}{2}$ h) $f(x)=sen^2 2x$, $x=0$

i) $f(x)=ln2x-\dfrac{1}{x-1}$, $x=2$

**26.-** Utilizar los desarrollos obtenidos en el ejercicio anterior para calcular un valor aproximado de:

a) $\left(1+e^{\frac{12}{20}}\right)^3$ b) $ln\frac{101}{99}$ c) $\sqrt[3]{\frac{81}{10}}$

**27.-** Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^x$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(1-cosx)}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{3+4^{\frac{1}{x}}}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen3x^2}{3x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\sqrt{x}}{\frac{1}{2}x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos(senx)}{x^2}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x^2)}{x^2}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$ l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+senx)}{senx}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x^3}$ n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx\,tgx}{1-cosx}$ o) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos4x}{5x^2}$

p) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{1-e^x}$ q) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen^2x}{1-cos2x}$ r) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4(x-ln(1+x))}{x\,ln(1+x)}$

s) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{x}}$ t) $\lim\limits_{x\to 0^+}(cosx)^{\frac{1}{x}}$

**28.-** Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^3+3}-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4^{lnx}-x^2}{lnx}$

**29.-** Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{5x^2-6x}{3x^2-8}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left[ln(x+1)-lnx\right]$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}lnx$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^x$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+4}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{lnx}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(1+x^6)}{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5}{e^{-x}}$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (lnx^3)e^{-x}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^x$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5x+1}{8x-1}\right)^{-x}$ l) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} sen\dfrac{1}{x}$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - lnx\right)$

**30.-** Dada $f(x) = 1 - xe^x$. Se pide:

a) Calcular los extremos relativos de $f(x)$ en su dominio.

b) Calcular los extremos absolutos de $f(x)$ en [-1,1].

c) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

d) Calcular los extremos absolutos de $f(x)$ en su dominio.

**31.-** Sea la función $f(x) = ln(1+x^2)$:

a) Determinar su dominio de definición.

b) Estudiar la existencia de óptimos locales de la función en su dominio de definición y en su caso calcularlos.

c) Estudiar la existencia de óptimos globales de la función en el intervalo [-1, 1] y en su caso calcularlos

d) Escribir el polinomio de Taylor de grado 2 de *f* en $x_0 = 0$.

e) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(1+x^2)}{x^2+5x}$ utilizando el apartado anterior.

**32.-** a) Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 para la función $f(x) = e^x ln(1-x)$ en el punto $x_0 = 0$.

b) Utilizando el resultado obtenido en el apartado anterior, calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x ln(1-x)}{x}$.

**33.-** Dada la función $f(x) = ln(9-x^2)$:

a) Hallar el dominio de *f*.

b) Hallar los extremos relativos (óptimos locales) de la función en su dominio.

c) Hallar los extremos absolutos (óptimos globales) de la función en $[-1,1]$.

d) Calcular el desarrollo de Taylor de orden 2 de *f* en $x_0 = 0$.

e) Utilizando el resultado del apartado d), calcular $\lim_{x\to 0} \frac{2ln3 - f(x)}{x^2}$.

**34.-** Sabiendo que la oferta de un bien en función de su precio $p$ es:

$$S(p) = \begin{cases} \dfrac{p^2}{20} & \text{si } 0 \le p < 10 \\ 2p - 15 & \text{si } 10 \le p \le 30 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de la función de oferta.

b) ¿Cuál es la oferta si el precio es de 5 unidades monetarias?

c) A la vista de la representación gráfica de la función, ¿cuál es la máxima y la mínima oferta?. ¿Para qué precios se producen?

**35.-** El coste total de producir $q$ unidades de un artículo es $C(q) = 4q^3 - 6q^2 + 18q + 12$.

a) Calcule el coste de producir 1 unidad.

b) Si se producen 20 unidades, ¿Cuál es el coste medio de producir cada una de ellas?

c) Escriba la función de coste medio.

d) Escriba la función de coste marginal.

**36.-** La demanda de un bien en función de su precio viene dada por una función de la forma $D(p) = ap^2 - b$. Determinar los valores de $a$ y de $b$ sabiendo que $D(8) = 1$ y que $\lim_{p\to 0} D(p) = 5$.

**37.-** El coste total de producir $q$ unidades de un bien es $C(q) = q^2 - 3\sqrt{q+1} + 4$ y cada unidad se vende a 47'7 unidades monetarias. Compruebe que el beneficio máximo se obtiene para una producción de 24 unidades.

**38.-** El beneficio, $B(p)$, que obtiene una empresa conocido el precio de venta del producto, $p \in [2,6]$, viene dado por dos segmentos rectilíneos cuyas pendientes son en ambos casos 0'2. Además se sabe que $B(3) = 50$ y que al ir aumentando el precio y pasar de 4 unidades monetarias se pierde una subvención que hace bajar el beneficio en 10 unidades. Escriba y represente esta función de beneficio.

**39.-** La función de costes según el número de horas trabajadas, $x$, es de la forma $C(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \in [0,100] \\ c\sqrt{x} & \text{si } x \in (100,200] \end{cases}$. Determine $a$, $b$, $c$ sabiendo que $C(x)$ es continua, que la pendiente de la recta tangente en $x$ = 50 es 8 y que 121 horas trabajadas suponen un coste igual a 990.

**40.-** Un librero puede obtener un cierto libro del editor a un coste de 3 euros. Si el precio de venta es de 15 euros, tiene una demanda de 200 libros y, por cada reducción de 0'5 euros en el precio de venta, la demanda aumentará en 10 libros. ¿A qué precio debe de vender los libros para elevar al máximo su beneficio?

**41.-** Dadas las funciones de ingreso y coste total de una empresa:

$$I(x) = -\frac{11}{4}x^2 + \frac{235}{108}x + 500 \qquad 2 \le x \le 5$$

$$C(x) = \frac{3}{4}x + 1 \qquad 2 \le x \le 5$$

siendo $x$ la producción de la empresa en miles de unidades, determínese la producción para obtener el máximo beneficio.

**42.-** Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1) $\int \frac{3}{1+2y}\,dy$ 2) $\int \frac{6z}{(z^2-5)^5}\,dz$ 3) $\int \frac{1}{t^2}\sqrt{-1+\frac{1}{t}}\,dt$

4) $\int (5-2x+\sqrt[4]{x^3}+8e^x)\,dx$ 5) $\int \frac{t}{1+t^2}\,dt$ 6) $\int \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}\,dy$

7) $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+8\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)dx$ 8) $\int \left(\frac{1}{3}x+5\right)^9 dx$ 9) $\int \frac{\ln t}{t}\,dt$

10) $\int \frac{5^t-3^t}{7^t}\,dt$ 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$ 12) $\int \frac{dx}{1+(1-x)^2}$

**43.-** Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1) $\int \frac{x^3+x+1}{x^3+x}\,\mathrm{dx}$ 2) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}\,dx$ 3) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

4) $\int \ln x\,dx$ 5) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}dx$ 6) $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$

7) $\int \frac{(\sqrt{x}-2x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$ 8) $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$ 9) $\int \frac{x+1}{x^2-4x+13}\,dx$

10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$ 11) $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\,dx$ 12) $\int \frac{1}{e^x-1}\,dx$

13) $\int \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}\,dx$

14) $\int tg(x)\,dx$

15) $\int x\sqrt{x+2}\,dx$

16) $\int \frac{dx}{x^4+9x^2}$

17) $\int \sqrt[3]{cos^2 x}\ senx\,dx$

18) $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

20) $\int (4+2x+x^2)\,e^{-2x}\,dx$

21) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}\,dx$

22) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$

23) $\int (x^5+1)\,ln\,x\,dx$

24) $\int 3^x cosx\,dx$

25) $\int \frac{\sqrt[5]{x^3}-\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^6}-\sqrt[6]{x^7}}\,dx$

26) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$

27) $\int \frac{2x}{x^2-4x+3}\,dx$

28) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x-1}}\,dx$

29) $\int \frac{(x+3)}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$

30) $\int \frac{2x}{x^2-5x+3}\,dx$

31) $\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

32) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}\,dx$

33) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

34) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

35) $\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}}$

36) $\int \frac{x^2dx}{(x^3-1)^2}$

37) $\int \frac{4x+4}{x^3-x^2-4x+4}\,dx$

38) $\int \frac{x\,dx}{x^4-4x^3-2x^2+12x+9}$

39) $\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx$

40) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}\,dx$

41) $\int x^3(lnx)^2\,dx$

42) $\int e^{2x}senx\,dx$

43) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$

44) $\int arcsenx$ dx

45) $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt{x^3}}\,dx$

46) $\int \frac{(4-2x)\,dx}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$

**44.-** Resolver los siguientes problemas de aplicación del cálculo integral:

1) Para un cierto país, la propensión marginal al consumo está dada por $\frac{dC}{dI}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2\sqrt{3I}}$ donde el consumo $C$ es una función del ingreso nacional $I$ (en millones de euros). Determinar la función de consumo para el país si se sabe que el consumo es de 1 millón de euros cuando $I$=12.

2) La función de coste marginal para el producto de un fabricante está dada por: $\frac{dc}{dq} = 10 - \frac{100}{q+10}$ donde $c$ es el coste total en euros cuando se producen $q$ unidades. Cuando se producen 100 unidades el coste promedio es de 50 euros la unidad. Con aproximación a la unidad de euro más cercana, determina el coste fijo del fabricante.

3) El coste marginal de la fabricación de un determinado producto viene dado por la función $CMg(x) = 6 - \frac{2}{\sqrt{x}}$. Sabiendo que el coste de funcionamiento es de 84000 euros, hallar la función de coste total de fabricación de dicho producto.

4) En el proceso de recuperación de un enfermo, se observa que el ritmo con el que elimina una sustancia tóxica viene dado por la función $f(t) = -1.19e^{-0.22t}$, donde $t$ es el tiempo en horas transcurrido desde la ingestión de dicha sustancia. Hallar la función que expresa la concentración de la sustancia en la sangre, sabiendo que una hora después de su ingestión la concentración es de 1 gramo por litro.

5) Se estima que dentro de $t$ meses la población de cierta ciudad cambiará a razón de $4 + 5t^{2/3}$ personas por mes. Si la población actual es de 10.000 personas, ¿cuál es la población dentro de 8 meses?.

6) Los promotores de una feria estiman que $t$ horas después de abrir las puertas, a las 9:00 a.m., los visitantes ingresarán a la feria a razón de $N'(t)$ personas por hora. Halle una expresión para el número de personas que entrarán a la feria entre las 11:00 a.m. y la 1:00 p.m.

7) Se estima que dentro de $t$ años la población de cierta comunidad a la orilla de un lago cambiará a razón de $0.6t^2 + 0.2t + 0.5$ miles de personas al año. Los ambientalistas han encontrado que el nivel de contaminación del lago aumenta a razón de, aproximadamente, 5 unidades por 1.000 personas. ¿En cuánto aumentará la contaminación del lago durante los próximos 2 años?.

8) Un fabricante manifestó que el coste marginal es $6q + 1$ euros por unidad cuando se producen $q$ unidades. El coste total (incluidos los gastos indirectos) de producir la primera unidad es de 130 euros. ¿Cuál es el coste total de producir las primeras 10 unidades?.

**45.-** Resolver los siguientes problemas de aplicación del cálculo integral al cálculo de áreas:

1) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $3y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

2) Calcula el área de la figura plana limitada por las parábolas $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$.

3) Calcula el área de la figura plana limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 2x$, $y = \frac{x^2}{2}$.

4) Calcula el área de la figura limitada por las curvas $x = 0$, $x = 2$, $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$.

5) Calcular el área limitada por la curva $y = x^2 - 5x + 6$ y la recta $y = 2x$.

6) Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$.

7) Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$.

8) Calcular el área limitada por las parábolas $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$.

## FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

**1.-** Determinar y representar gráficamente el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=3x+y$

b) $f(x,y)=\dfrac{3x+y}{x^2+2y^2}$

c) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$

d) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2}$

e) $f(x,y)=ln\,(2x-y+1)$

f) $f(x,y)=x+\sqrt{y}$

g) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$

h) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

i) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

j) $f(x,y)=\left(ln(x+y),\sqrt{4-x^2-y^2}\right)$

k) $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

**2.-** Representar gráficamente las curvas de nivel de:

a) $f(x,y)=x+y$

b) $f(x,y)=(x+y)^2$

c) $f(x,y)=x^2+y^2$

d) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$

e) $f(x,y)=\sqrt{xy}$

f) $f(x,y)=x^y, x>0$

g) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2}$

h) $f(x,y)=ln\,(2x-y+1)$

**3.-** Dada $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{(y-2x^2)(y-3x^2)}{y^2+6x^4}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Determínese gráficamente su dominio.

b) Calcúlese, si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ según la dirección $y=x^2$.

c) Calcúlese, si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. ¿Es *f* continua en $(0,0)$?

d) Calcúlense las derivadas parciales de la función *f* en $(0,0)$.

e) ¿Es *f* diferenciable en $(0,0)$?

**4.-** Calcular la derivada de $f(x,y)=3-2x^2+y^3$ en el punto *P*=(1,2) en la dirección de $v=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.

**5.-** Utilizando la definición calcular la derivada direccional de $f(x,y)=x^2+y+1$ en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ en el punto (0,0).

**6.-** Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z)=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{z}{y}}$

b) $f(x,y)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$

c) $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}$

d) $f(x,y)=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$

e) $f(x,y)=x^3+y^3-3axy$

f) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

g) $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$

h) $f(x,y)=x^y$

i) $f(x,y,z)=z^{xy}$

j) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

k) $z=x^2 sen^2 y$

l) $z=\dfrac{e^{ax}(sen\,x+a\cos y)}{a^2+b^2}$

**7.-** Calcular $\nabla f(x,y)$ cuando $f(x,y)=x^2y+y^3$.

**8.-** Calcular $\dfrac{dz}{dt}$ en las funciones:

a) $z=3x+y$, con $x=t^2+1$; $y=e^t$.

b) $z=xy+yu+xu$, con $x=t$; $y=e^{-t}$; $u=log(t)$.

c) $z=e^{xy}$, con $x=t\ cost$; $y=t\ sen\,t$.

**9.-** Calcular $\dfrac{dz}{du}$ en la función $z=3x^2+2xy-y^2$, con $x=u^2+3u$; $y=2u^2-u$.

**10.-** Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ en la función $u=z\,sen\dfrac{y}{x}$, con $x=3r^2+2s$; $y=4r-2s^3$, $z=2r^2-3s^2$.

**11.-** Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en las funciones:

a) $z = u + v$, con $u = x + e^y$ ; $v = log(y) + e^{-x}$ .

b) $z = \frac{sen\, u}{v}$, con $u = s - t$ ; $v = s + x$ ; $s = y^2 - x$ ; $t = e^y$ .

**12.-** Demostrar que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$, si $z = ln(x^2 + xy + y^2)$.

**13.-** Demostrar que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, si $z = xy + x\,e^{y/x}$.

**14.-** Demostrar que se verifica

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + xy\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = xyz,$$

siendo $z = e^y F\left(y\, e^{x^2/2y^2}\right)$ y $F$ una función real de variable real derivable.

**15.-** Hállese la matriz jacobiana de las siguientes funciones:

a) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$ b) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ c) $f(t) = (t, e^t, e^{-t})$

**16.-** Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Estudiar, aplicando la definición, la diferenciabilidad de *f* en $(0,0)$.

**17.-** Determinar la diferencial de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, en $(1,1)$.

b) $u = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z$, en $(1,1,1)$.

c) $z = (e^{x+y} + y, xy^2)$, en $(0,0)$.

**18.-** Sea $f(x,y) = x^2 e^{\frac{y}{x}}$, calcular *df*.

**19.-** Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = log(x^2 + y^3)$ en el punto $P = (1,3)$ en la dirección de $v = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.

**20.-** Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = x\,sen(yz)$ en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ en el punto (1,3,0).

**21.-** Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = x\,seny + y\cos z + z\,senx$ en la dirección $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en el punto (0,0,0).

**22.-** Sea $f(x,y)$ una función diferenciable en el punto (1,2). Sabiendo que $f_v(1,2) = 5$ y $f_w(1,2) = 6$ con $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $w = \left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, calcular $\nabla f(1,2)$.

**23.-** Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = (x^2 + yz^2, sen(x^2 + y^2))$ en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ en el punto $(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi},1)$.

**24.-** Dado el campo vectorial $f(x,y) = (xy, x^2, y^2)$, se pide:

a) Estudiar su diferenciabilidad en el punto $(-1,2)$.

b) En el caso de ser diferenciable, calcular su diferencial en dicho punto.

c) Hallar $f_v\,'$ en el punto $(-1,2)$ siendo $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

**25.-** Dada $f(x,y) = x\,e^{2y-x}$, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

**26.-** Calcular la matriz hessiana de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$.

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 4\ln x - 10\ln y$, $x,y > 0$.

c) $f(x,y) = 9x^2 + y^2 + 6xy + 12x + 4y$.

d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

f) $f(x,y,z) = xyz$.

**27.-** Si $F$ y $G$ son funciones reales de una variable real con derivadas de segundo orden continuas, demostrar que la función $z = x\,F\left(\frac{y}{x}\right) + G\left(\frac{y}{x}\right)$, satisface la siguiente ecuación:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = 0 .$$

**28.-** Sabiendo que $f$ y $g$ son funciones reales de una variable real con derivadas de segundo orden y $z = f(x^2 + y^2) + g(x^2 + y^2)$, calcular:

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) - \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) - \frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{y^3}\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) .$$

**29.-** Comprobar que $z = log(x^2 + y^2)$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

**30.-** Si $f$ es una función real de variable real con derivada segunda, comprobar que la función $z = x\,f(x+y) + y\,f(x+y)$ satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

**31.-** Dadas las funciones $f(x,y) = (e^{3x+y}, y - x + 1, x^2 + 3)$ y $g(u,v,w) = (sen(u+w), v^u)$, se pide:

a) Probar que $f$ es diferenciable en $(0,0)$ y que $g$ es diferenciable en $(1,1,3)$.

b) Calcular la diferencial de $g \circ f$ en el punto $(0,0)$.

**32.-** Sean $f(x,y) = (y + x^2, e^y + x)$ y $g(u,v) = u + v$. Demostrar que $f$ y $g$ son diferenciables en $\mathbb{R}^2$. Calcular $(g \circ f)'(0,0)$.

**33.-** Sean $f(x,y) = (e^{y+x}, x - y, x^2)$ y $g(u,v,w) = (w^3, (u+v)^2)$. Probar que $f$ es diferenciable en $(0,0)$, $g$ es diferenciable en $f(0,0)$ y calcular $(g \circ f)'(0,0)$ aplicando y sin aplicar la regla de la cadena.

**34.-** Dada la función $f(x,y)=\sqrt{x+y}\ ln y$, se considera la ecuación $f(x,y)=2e$. Se pide:

a) Demostrar que la anterior ecuación define a $y$ como función implícita de $x$ en un entorno del punto $(0,e^2)$.

b) Calcular $y'(0)$.

**35.-** a) Comprobar que la ecuación $e^z sen(x+y)+e^y sen(x+z)+e^x sen(y+z)=0$ define a $z$ como función implícita de $x$ y de $y$ en un entorno del punto $(\pi,0,\pi)$.

b) Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}(\pi,0)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(\pi,0)$.

**36.-** Probar que la ecuación $x^2y+xy^2=16$ define a $y$ como función implícita de $x$ en un entorno del punto (2,2). ¿Qué podemos decir del crecimiento de la función $y(x)$ en un entorno de $x$=2?

**37.-** Considerar la ecuación $3\alpha x^2-ln(yz)-\frac{3\alpha x}{yz}=0$. ¿Para qué valores del parámetro $\alpha$ podemos asegurar que la ecuación anterior define implícitamente la función $x=x(y,z)$ en un entorno del punto (1,1,1)?

**38.-** Demostrar que el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2u-v+x^2+xy=0 \\ u+2v+xy-y^2=0 \end{array}\right\}$$

define a $x$ e $y$ como funciones implícitas de $(u,v)$ en un entorno de $(x,y,u,v)=\left(0,1,\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$.

Calcular $\frac{\partial x}{\partial u}$ y $\frac{\partial y}{\partial u}$ en el punto $(u,v)=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$.

**39.-** Considerar el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x\cos y+y\cos z+z\cos x=\pi \\ x^2+y^2+z^2-xy=\pi^2 \end{array}\right\}$$

a) Demostrar que el sistema define implícitamente a las funciones $y=f(x)$, $z=g(x)$ en un entorno del punto $(x,y,z)=(0,0,\pi)$.

b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la función $z=g(x)$ en $x=0$.

c) Considerar el campo escalar $u(x,y,z)=e^{x+y}+x^2z$. Suponiendo que se verifica el sistema de ecuaciones dado, calcular $\dfrac{du}{dx}(0)$.

**40.-** Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+sen\,x-y^2+z^3=0 \\ -ln(1+x)+y^2z=1 \end{array}\right\}$$

a) Probar que define implícitamente las funciones $y=y(x)$, $z=z(x)$ en un entorno del punto (0,0,1).

b) Considerar la función $g(x,y(x),z(x))=2\,x\,y(x)\,z(x)+z(x)tgx$, calcular $g'(x)$ en $x$=0.

**41.-** Considerar el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+z^2=r^2 \\ y^2+z^2=r^2 \end{array}\right\}$$

siendo $r$ un número real positivo. Probar que define implícitamente $x=x(z)$, $y=y(z)$ en un entorno del punto $\left(\dfrac{r}{\sqrt{2}},\dfrac{r}{\sqrt{2}},\dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)$.

**42.-** Considerar el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+z^2=50 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\}$$

a) Probar que define implícitamente $y=y(x)$, $z=z(x)$ en un entorno del punto (3,4,5).

b) Considerar la función $f(x)=e^{xy(x)}+z^2(x)$. Calcular $f'(x)$ en $x$=3.

**43.-** Considerar el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x^2-2y^2+z^2=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{array}\right\}$$

a) Analizar la existencia de funciones implícitas $y=y(x)$, $z=z(x)$ en un entorno del punto (2,2,2).

b) Calcular $\dfrac{dy}{dx}(2)$ y $\dfrac{dz}{dx}(2)$.

**44.-** Considerar el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + xz = A \\ \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + zy = B \end{array}\right\}$$

a) ¿Qué valor deben de tomar $A$ y $B$ para poder asegurar que existen funciones implícitas $x = x(z)$, $y = y(z)$ en un entorno del punto (1,1,1)?

b) En las condiciones del apartado a) calcular $x'(1)$, $y'(1)$.

**45.-** Estudiar si son homogéneas las siguientes funciones indicando el grado de homogeneidad:

a) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x}$

b) $f(x,y) = 3x^4 + 4x^2y^2 + 5y^4$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^3 + y^3}$

d) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$

e) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-1/3}$

f) $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 - 15x - 12y$

g) $f(x,y) = 90x^{1/3}y^{1/3}$

h) $f(x,y) = x^a y^b$

i) $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x^3y + x^2yz - 4xz^3}{x - 2y}\right)^5$

j) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2} ln \dfrac{y}{z}$

k) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^2 - y^2} + \sqrt{x + z}$

l) $f(x,y,z) = \sqrt[5]{\dfrac{x^6 + y^4x^2 + yz^5}{2z^3}}$

m) $f(x,y,z) = ln \dfrac{x - 2y}{y + 3z}$

n) $f(x,y,z) = e^{3x+y} + \sqrt[3]{xz}$

o) $f(x,y,z) = e^{\sqrt{\frac{x^2}{yz}}}$

p) $f(x,y,z) = x ln \dfrac{y}{z} + \sqrt{2yz} + 7$

**46.-** Para las funciones del ejercicio anterior, calcular las derivadas parciales. Comprobar el resultado del teorema de Euler.

**47.-** Dada $f(x,y) = x^4y^2e^{y/x}$, comprobar que $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6f$. ¿Qué se deduce de la anterior igualdad?

**48.-** Sea $f$ una función homogénea de grado $m$, tal que $f(-1,1)=1$ y $f(-2,2)=1$. Calcular $m$.

**49.-** Sea $f$ una función diferenciable y homogénea de grado 2 con $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,2)=3$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,2)=4$. Calcular $f(3,2)$.

**50.-** De la función $f(x,y,z)$ se sabe que es diferenciable, homogénea de grado 3 y que las componentes de su vector gradiente en el punto $(1,2,3)$ son $(5,2,2)$. ¿Cuál es el valor de la función en el punto $(1,2,3)$?

**51.-** Sea $z=z(x,y)$ que verifica la ecuación $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$, siendo $F$ una función con derivadas de primer orden, la segunda de ellas no nula. Se pide:

a) Demostrar que $z=z(x,y)$ es homogénea de grado 1.

b) ¿Es homogénea $\dfrac{\partial z}{\partial x}$? En caso afirmativo, ¿de qué grado? Razona la respuesta.

**52.-** Sea $f(x,y)$ homogénea de grado 1 con derivadas de segundo orden. Probar que:

$$\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{1}{xy}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

**53.-** Sea $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. Demostrar que:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$$

**54.-** Obtener el desarrollo de Taylor de orden 2 para el campo escalar $f(x,y,z)=x+yz+e^y$ en un entorno de $(1,0,1)$.

**55.-** Obtener el desarrollo de Taylor de orden 2 para el campo escalar $z=e^{2x-3y}$ en un entorno de $(0,0)$.

**56.-** Dada la ecuación $z\,sen\,x-y\,sen\,z=0$, se pide:

a) Demostrar que define a $z$ como función implícita de $(x,y)$ en un entorno de $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Hallar el polinomio de Taylor de grado 1 en un entorno del punto $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ de la función definida en el apartado a).

**57.-** Sea $f(x,y)=g(x^2+y^2)$, siendo $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable en cualquier punto de la recta real. Si $g'(5) = 3$, calcular $\nabla f(1,2)$.

**58.-** Sea $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$.

a) Calcular las curvas de nivel de $f(x,y)$ y representarlas gráficamente.

b) Calcular $\nabla f(2,1)$.

c) Calcular la derivada direccional de $f$ en el punto (2,1) según la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

d) Teniendo en cuenta $\left\{\begin{array}{l} x=2+Ln\,t^2 \\ y=e^{t^3-1} \end{array}\right.$, calcular $\frac{df}{dt}(1)$.

**59.-** Sea la función $f(x,y)=ln(1+x^2+2y^2)$. Se pide:

a) Calcular el dominio de $f$.

b) Calcular el vector gradiente de $f$ en $(x,y)$.

c) ¿Es la función $f$ diferenciable?

d) Calcular la derivada direccional de la función $f$ respecto de la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ en el punto (1,1).

e) ¿Verifica la función $f$ las condiciones del Teorema de Schwarz?

f) Utilizando el resultado del apartado anterior, calcular la matriz Hessiana de $f$ en $(x,y)$.

**60.-** Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones reales de variable real y $h(x,y)=f(y\cdot g(x))$. Suponiendo que existen $f''$ y $g''$ en todo $\mathbb{R}$, calcular $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y), \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y)$.

**61.-** Sea $f(x,y)=(x^2+y^2,x^2-y^2)$ y sea $g(u,v)$ una función tal que su matriz jacobiana en (2,0) es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz jacobiana de $h = g \circ f$ en (1,1).

**62.-** Sean $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ y $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ diferenciable $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $g(0,1)$ = (0,1,0) y $Jg(0,1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Calcular, si existe, la diferencial de $f\circ g$ en (0,1).

**63.-** Sea la función $f(x,y)=ln\left(\dfrac{y}{x^2}+1\right)-1$.

a) Determinar las curvas de nivel de la función y representarlas gráficamente.

b) Calcular $\nabla f(1,2e)$.

c) Dado el vector $v=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, calcular la derivada direccional $f_v(1,2e)$.

d) Probar que la curva de nivel 0 de $f$ define implícitamente a la variable $y$ como función de la variable $x$. Derivando implícitamente calcular $y'(1)$.

**64.-** Dadas las funciones $f(t)=\left(t,\dfrac{1}{t},\sqrt{t}\right)$ y $g(x,y,z)=xyz$, se pide:

a) Determinar los dominios de definición de $f$ y $g$.

b) Calcular $g\circ f$ y obtener entonces la matriz jacobiana de $g\circ f$, $J(g\circ f)$.

c) Calcular $J(g\circ f)$ utilizando la regla de la cadena.

d) Demostrar que $\det(Hg(x,y,z))=2g(x,y,z)$, donde $Hg(x,y,z)$ representa la matriz hessiana de $g$.

**65.-** Considerar la función de dos variables $f(x,y)=\dfrac{y}{x+2y}$.

a) Determinar su dominio y representarlo gráficamente.

b) Determinar y representar las curvas de nivel de $f$.

c) Probar que no existe el límite: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

d) Determinar los pares $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tales que la ecuación $f(x,y)=\dfrac{b}{a+2b}$ define a la variable $y$ como función de la variable $x$ en un entorno del punto $(a,b)$. Para cada uno de los pares anteriores, calcular $y'(a)$ por derivación implícita.

**66.-** Sea $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $h(x,y)=sen(x^2+y)+x\,y+a^2\,y$.

a) ¿Para qué valores de $a$ la ecuación $h(x,\,y)=0$ define a $y$ como función implícita de $x$, $y=\varphi(x)$, en un entorno del punto (0, 0)?

b) Calcular $\varphi'(0)$.

c) ¿Define la misma ecuación en un entorno del (0,0) a *x* como función implícita de *y* para algún valor de *a*?

d) Sea $F(x,t)=(e^{x+t}+x^2-1,\ e^{\varphi(x)}+t\cos x-1)$, con $\varphi(x)$ la función implícita anterior. Probar que $JF(0,0)$ es una matriz regular.

**67.-** a) ¿Para qué valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ la ecuación $e^{x^2-y^2}+\alpha(x^2+y^2)=1+\alpha$ define una función implícita $y=y(x)$ en un entorno del punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

b) Para los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$, hallados en el apartado anterior, calcular $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

**68.-** Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por: $f(x,y,z)=\alpha\ y\ z-y\ ln\left(1+z^2\right)+z\ cos(x+2y)+1,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

a) Probar que *f*(*x*,*y*,*z*)=0 define a *z* como función implícita de *x* e *y* en un entorno de $(\pi,0,1)$ para cualquier valor de $\alpha$.

b) Calcular $\alpha$ para que $\frac{\partial z}{\partial x}(\pi,0)=0=\frac{\partial z}{\partial y}(\pi,0)$.

**69.-** Dada la ecuación $xy^2-yx^2+z^2cos(xz)=1$:

a) Probar que define a $z(x,y)$ como función implícita en un entorno del punto $(0,\sqrt{2},1)$.

b) Hallar el plano tangente a $z(x,y)$ en el punto $(0,\sqrt{2})$.

c) Hallar la derivada direccional de $z(x,y)$ en $(0,\sqrt{2})$ respecto de la dirección $v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

**70.-** Sea $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z,t)=x^3z+y^3t^2-1$:

a) Probar que la ecuación $F(x,y,z,t)=0$ define a la variable *t* como función de las variables (*x*,*y*,*z*) en un entorno del punto (0, 1, 0, 1).

b) Si $t=\varphi(x,y,z)$ es la función del apartado anterior, calcular $\nabla\varphi(0,1,0)$.

c) Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por $g(u)=\left(u,u^2\right)$. Probar que g es diferenciable en *u*=1.

d) Razonar que la aplicación $g \circ \varphi$ es diferenciable en (0, 1, 0) y calcular $J(g \circ \varphi)(0,1,0)$.

**71.-** a) Probar que el sistema

$$\left.\begin{array}{r}(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1\\ e^{xy}+x^2-z^2=1\end{array}\right\}$$

define a $y$ y a $z$ como funciones implícitas de $x$ $(y=y(x), z=z(x))$ en un entorno del punto $(x_0,y_0,z_0)=(2,0,2)$.

b) Calcular la derivada primera de la función $F(x)=sen(x\cdot y(x))+(z(x))^2$ en el punto $x_0=2$.

**72.-** Sea $F(x,y,z)=x^2\,z\,y+e^{x\,z}-z^2\,y+4\,y$

a) Sin calcular las derivadas parciales, razona si la siguiente igualdad es cierta:

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=4\,F(x,y,z).$$

b) Calcular $\nabla F(0,2,1)$.

c) Calcular la derivada direccional de $F(x,y,z)$ respecto de la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ en el punto (0,2,1).

d) Demuestra que la ecuación $F(x,y,z)=7$ define a $x$ como función implícita de $y,z$ ($x = f(y,z)$) en un entorno del punto (0,2,1).

e) Calcular $\nabla f(2,1)$.

f) Calcular la derivada direccional de $f(y,z)$ respecto de la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ en el punto (2,1).

**73.-** a) Comprobar que $f(x,y,z)=e^{tg\frac{x^2+y^2+z^2}{x\,y}}$ es homogénea de grado 0.

b) Calcular $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

**74.-** Sean $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ funciones diferenciables y homogéneas de grados 4 y 1, respectivamente. Probar que si $h(x,y,z)=f(x,y,z).g(x,y,z)$, se verifica:

$$x\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z)=5h(x,y,z).$$

**75.-** Sea $f(x,y)$ diferenciable tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=1$, $f(1,1)=2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=1$, $f(1,2)=5$. Decir si *f* es homogénea y en caso afirmativo de qué grado.

**76.-** Sea la función de producción de una empresa $Q(K,L)=2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{2}{5}}$, donde *K* es el capital, *L* el trabajo y *Q* la producción obtenida.

a) Suponiendo que se están utilizando 9 unidades de capital y 32 de trabajo, ¿qué input se deberá aumentar para generar un mayor incremento de la producción, suponiendo que el otro se mantiene constante?

b) Suponiendo que se están utilizando 9 unidades de capital y 32 de trabajo, ¿cuál sería aproximadamente la variación de la producción si se incrementa en 2 unidades el capital y en 1 el trabajo?

c) Sin realizar las derivadas, calcular la expresión $K\frac{\partial Q}{\partial K}(K,L)+L\frac{\partial Q}{\partial L}(K,L)$.

**77.-** La función de producción de un bien es $Q(K,L)=8\sqrt[3]{K^2L}$, donde *Q* es la cantidad de producción, *K* y *L* la cantidad de inputs capital y trabajo respectivamente.

Demostrar que la productividad del trabajo es una función de la ratio capital-trabajo (sólo depende de la proporción entre el capital y el trabajo).

**78.-** Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una función diferenciable de la cual se sabe que $\nabla f(2,-1,3)=(4,7,-2)$.

a) Determinar la variación aproximada que experimenta la función *f* a partir del punto $(2,-1,3)$ si sólo varía la variable *y*.

b) Determinar la variación aproximada que experimenta *f* si a partir del punto $(2,-1,3)$ pasamos al punto $(2'1,-0'8,2'9)$.

c) Determinar $D_v f(2,-1,3)$, siendo $v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

**79.-** Una empresa produce dos productos en cantidades $q_1$ y $q_2$ respectivamente, siendo sus ingresos $I(q_1, q_2) = q_1 q_2$. Cada uno de los productos tiene una función de producción que depende del capital *K* y del trabajo *L* que vienen dadas por:

$$q_1(K, L) = 3K + 2L, \qquad q_2(K, L) = 6\sqrt{K^2 L}$$

a) Calcular $\frac{\partial I}{\partial K}(K, L), \frac{\partial I}{\partial L}(K, L)$ cuando se utilizan 4 unidades de capital y 9 de trabajo.

b) ¿Son homogéneas las funciones de producción?, ¿de qué grado?

c) Sin hacer las derivadas, calcular $K\frac{\partial I}{\partial K}(K, L) + L\frac{\partial I}{\partial L}(K, L)$.