MATRICES

1.- Calcular:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 10 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 6 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ l) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ n) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ñ) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

o) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ p) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ q) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}$

r) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ s) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ -1 & a & 1 & 1 & . & . & 1 \\ -1 & -1 & a & 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -1 & -1 & -1 & -1 & . & . & a \end{vmatrix}$

t) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & n-1 \\ 2 & 3 & 4 & . & . & n \\ 3 & 4 & 5 & . & . & n+1 \\ . & . & . & . & . & . \\ n-2 & n-1 & n & . & . & 2n-2 \\ n-1 & n & n+1 & . & . & 2n-1 \end{vmatrix}$

2.- Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 4 & x & 6 \\ 5 & 7 & 12 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$.

3.- Demostrar:

a) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = -2(x^3+y^3)$ b) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = x^2z^2$

4.- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular $\left|A - \lambda I_3\right|$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

5.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, obtener el valor de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+4 & y+4 & z+4 \end{vmatrix}$.

6.- Sean $A, B \in M_4$ con $|A|=3$, $|B|=-2$. Calcular:

a) $|2A|$. b) $|\frac{1}{2}B|$. c) $|BA^t|$.

d) $|(BA)^t|$. e) $|(B^tA^tB)^t|$.

7.- Calcular el rango de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

8.- Calcular, según los valores reales del parámetro a, el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & a \end{pmatrix}$$

9.- Estudiar si las siguientes matrices son inversibles. En caso afirmativo calcular la matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.- Estudiar la existencia de la matriz inversa según los valores de $m \in \mathbb{R}$. Calcular la matriz inversa en los casos que sea posible.

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

11.- Estudiar para qué valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ las siguientes matrices no tienen inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1-m & 2 \\ 3 & 2-m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -m & 5 \\ 2 & 3-m \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2-m & 3 & 1 \\ 1 & 1-m & 4 \\ 0 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} m & 9 & 4 \\ 4 & m & -1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ -1 & 3 & m-1 \end{pmatrix}$$

12.- Dadas las matrices $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-3&1\\2&0&1\end{pmatrix}$, calcular la matriz A que verifica $P^{-1}AP=B$.

13.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Utiliza la Regla de Cramer para calcular las soluciones:

a) $\left.\begin{aligned}x+y-z&=3\\5x-y+2z&=5\\-3x+3y-4z&=1\end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned}x+y-z&=1\\x+2y+z&=2\\x+3y-z&=0\end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned}x+y-2z+t+3s&=1\\2x-y+2z+2t+6s&=2\\3x+2y-4z-3t-9s&=3\end{aligned}\right\}$

14.- Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales según los valores reales de los parámetros (m, a y b). Utiliza la Regla de Cramer para calcular las soluciones:

a) $\left.\begin{aligned}mx+y-z&=1\\x+2y+z&=2\\x+3y-z&=0\end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned}mx+y+z&=m\\x+my+z&=1\\x+y+mz&=1\end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned}x+y+z&=m\\x+(1+m)y+z&=2m\\x+y+z&=4\end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned}x+my-z&=0\\2x-3y-2z&=0\\x+2y+z&=0\end{aligned}\right\}$ e) $\left.\begin{aligned}mx+y+3z&=3\\x-y-z&=0\\5x-3y-2z&=6\end{aligned}\right\}$ f) $\left.\begin{aligned}x-2y+z&=-1\\x+y+3z&=4\\5x-y+mz&=10\end{aligned}\right\}$

g) $\left.\begin{aligned}-x+2y-2z&=0\\2x-y+az&=b\\2x-2y+3z&=1+b\end{aligned}\right\}$ h) $\left.\begin{aligned}2x+ay+z&=7\\x+ay+z+t&=b\\x+2ay+t&=-1\\bx+ay&=b\end{aligned}\right\}$

15.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&m\\3&2&4m\\2&1&3\end{pmatrix}$ con $m\in\mathbb{R}$:

a) ¿Para que valores del parámetro m, es la matriz A inversible?.

b) Resolver el sistema lineal $AX=0_3$ utilizando el apartado anterior.

16.- Considerar las matrices $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\a&1&0&1-a\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a\\a^2\\a^3\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$, con a un parámetro real.

a) Discutir en función de a el sistema $AX=B$.

b) En los casos que sea posible, calcular las soluciones de $AX=B$.

17.- En un mercado con competencia perfecta las funciones de oferta y demanda de los bienes están dadas por:

$Q_{1d} = 10 - 2P_1 + 4P_2$ $\qquad$ $Q_{2d} = 10 + 5P_1 - 3P_2$

$Q_{1s} = 20 + 3P_1 - 2P_2$ $\qquad$ $Q_{2s} = 30 - 7P_1 + 5P_2$

Donde Q_{id} es la cantidad demandada de bien *i*, Q_{is} es la cantidad ofertada de bien *i* y P_i es el precio de mercado del bien *i*, para *i*=1,2. Calcular los precios para los que el mercado está en equilibrio y la cantidad demanda y ofertada de cada bien en esta situación.

18.- La condición de equilibrio para el precio de tres bienes en un mercado queda determinado por la siguiente condición:

$$\begin{aligned} 11P_1 - P_2 - P_3 &= 31 \\ -P_1 + 6P_2 - 2P_3 &= 26 \\ -P_1 - 2P_2 + 7P_3 &= 24 \end{aligned}$$

Siendo P_1, P_2 y P_3 los precios de estos tres bienes. Calcular el precio de equilibrio de cada bien.

19.- Considerar los vectores *u* = (1, -3, 2) y *v* = (2, -1, 1) de $\mathbb{R}^3$:

a) Escribir, si es posible, los vectores (1, 7, -4) y (2, -5, 4) como combinación lineal de *u* y *v*.

b) ¿Para qué valores de *x* es el vector (1, *x*, 5) una combinación lineal de *u* y *v*?

20.- Los vectores $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (2,1,3)$ y $v_3 = (5, 2, 10)$ de $\mathbb{R}^3$, ¿son linealmente independientes? En caso de no serlo hallar la relación de dependencia.

21.- Dados los vectores $u_1 = (2,-1,0)$, $u_2 = (0,1,-1)$ y $u_3 = (8,3,1)$ de $\mathbb{R}^3$, estudiar si son linealmente dependientes o independientes.

22.- Dados los vectores $u_1 = (1,0,-1,0)$, $u_2 = (2,0,3,-1)$, $u_3 = (1,1,-1,1)$ y $u_4 = (2,1,-2,1)$ de $\mathbb{R}^4$, estudiar si son linealmente independientes. En caso de no serlo hallar la relación de dependencia.

23.- Dados los vectores de $\mathbb{R}^4$ $v_1 = (1,1,0,m)$, $v_2 = (3,-1,n,-1)$ y $v_3 = (-3,5,m,-4)$, determinar los valores que han de tomar los parámetros *m* y *n* para que los tres vectores sean linealmente dependientes.

24.- Sean u = (-1, 0, 0), v = (1, 1, 0) y w = (-1, 1, -1) vectores de $\mathbb{R}^3$:

a) Demostrar que $\{u, v, w\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Hallar las coordenadas respecto de esta base del vector cuyas coordenadas respecto de la base canónica son 1, 0, 2.

c) Hallar las coordenadas respecto de la base canónica del vector $a = 3u - v + 5w$.

25.- Sea $A \in M_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de A y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vector propio de A asociado a λ. Probar que:

a) $\alpha\lambda$ es valor propio de la matriz αA para cualquier $\alpha \in R$ y $\mathbf{x}$ es vector propio de αA asociado a $\alpha\lambda$.

b) λ^p es valor propio de A^p y $\mathbf{x}$ es vector propio de A^p asociado a λ^p.

c) $|A| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ es valor propio de A.

d) Si A es regular entonces $\lambda \neq 0$. Además, λ^{-1} es valor propio de A^{-1} y $\mathbf{x}$ es vector propio de A^{-1} asociado a λ^{-1}.

26.- Sean $A, B \in M_n$ matrices semejantes. Probar que:

a) $|A| = |B|$.

b) A^p es semejante a B^p para cualquier $p \in \mathbb{N}$.

c) Si A es regular entonces B es regular y A^{-1} es semejante a B^{-1}.

27.- Sea $A \in M_n$. Probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico.

28.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Estudiar si 3 es o no valor propio de A.

b) ¿Son los vectores (1,1,1) y (0,0,1) vectores propios de A? En caso afirmativo, buscar el valor propio asociado.

29.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Estudiar si el vector $(-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ es o no un vector propio de la matriz A. En caso afirmativo determinar el valor propio asociado.

b) Lo mismo para el vector (-1,0,1).

30.- Para cada una de las siguientes matrices indicar razonadamente si es diagonalizable o no. Además:

a) En caso afirmativo, dar una matriz semejante diagonal y la matriz regular de paso.

b) En caso negativo, calcular los valores propios y los vectores propios asociados a cada valor propio.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_9 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

31.- Una matriz $A \in M_2$ verifica las siguientes condiciones: $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y (2,-1) es vector propio de *A* asociado al valor propio $\lambda = -2$. Hallar la matriz *A* indicando si es diagonalizable o no. En caso afirmativo dar una matriz semejante diagonal *D* y la matriz de paso *P* tal que $D = P^{-1}AP$.

32.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular los valores de los parámetros *a* y *b* para que el vector (2,-1) sea vector propio de *A* asociado al valor propio 2.

33.- Encontrar una matriz $A \in M_3$ no diagonal de valores propios -1, 1, 2 con vectores propios asociados (1,0,-1), (-1,1,0), (3,-3,1) respectivamente.

34.- Encontrar una matriz $A \in M_3$ no diagonal de valores propios $\lambda_1 = 1$ simple y $\lambda_2 = 2$ doble con vectores propios asociados (1,1,0), (1,0,0) respectivamente.

35.- Encontrar una matriz $A \in M_3$ con valores propios $\lambda_1 = -1$ doble, $\lambda_2 = 3$ simple y con vectores propios asociados (1,0,2), (-1,0,0) y (0,1,1) respectivamente.

36.- Sea $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ con $a,b\in\mathbb{R}$. Calcular los valores de los parámetros a y b para que A tenga como valores propios 1 y -1. ¿Es A una matriz diagonalizable?.

37.- Considerar la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a\in\mathbb{R}$.

a) ¿Para qué valores del parámetro a $\lambda=-2$ es valor propio de A?.

b) ¿Para qué valores del parámetro a es la matriz A diagonalizable?.

38.- Determinar una matriz $A\in M_3$ tal que $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que sus vectores propios sean los vectores de $\mathbb{R}^3$ no nulos de los conjuntos $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z\}$, $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0, z=0\}$.

39.- La matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$ admite como vectores propios (-1,-1,0), (1,0,-2) y $(0,-1,1)$ asociados a los valores propios 3, 0 y 3/2 respectivamente. Se pide:

a) Hallar los elementos desconocidos de A.

b) ¿Es A diagonalizable?. En caso afirmativo, diagonalizarla.

40.- Considerar la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar sus valores y vectores propios. ¿Es A diagonalizable?.

b) Comprobar que se cumple que el determinante de la matriz A es el producto de sus valores propios.

41.- Comprobar que las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ tienen los mismos valores propios pero sin embargo no son semejantes.

42.- Calcular A^{100} y, en general, A^k, con $k\in\mathbb{N}$, para la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

43.- Calcular A^k con $k \in \mathbb{N}$ impar para la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

44.- Calcular A^n $\forall n \in \mathbb{N}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

45.- Calcular una matriz $A \in M_3$ simétrica que verifique: v=(1,-1,0) es vector propio de A,

$A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $|A|$ =0. Calcular A^{50}.

46.- Determinar para qué valores de los parámetros $b, c \in \mathbb{R}$ las siguientes matrices son diagonalizables. En los casos que lo sea, encontrar una matriz diagonal semejante a la dada.

$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & c \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

47.- Para cada una de las siguientes matrices A_i, i=1,2,3, encontrar si es posible una matriz regular P y una matriz diagonal D de forma que $D = P^{-1}A_iP$.

$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

48.- El polinomio característico de una matriz A de orden 3 es $P(\lambda) = -\lambda^3 + 21\lambda - 20$. Con estos datos, ¿puedes justificar si A es inversible y/o diagonalizable?

49.- Los valores propios de una cierta matriz $A \in M(n \times n)$ diagonalizable son las raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 - 5\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda + 4$.

a) Determinar los valores propios y su multiplicidad.

b) Determinar la dimensión n de la matriz A y $Rg(A)$.

c) Calcular, si es posible, $\left|A^{-1}\right|$ y $\left|-\frac{1}{2}A^{-1}\right|$.

d) Calcular los valores propios de A^2 y su multiplicidad.

50.- Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcular valores y vectores propios de *A*.

b) ¿Es *A* diagonalizable? En caso afirmativo calcular una matriz semejante diagonal *D* y una matriz *P* tal que $D = P^{-1}AP$.

c) ¿Existe algún valor del parámetro *a* para que (3,-6,*a*) sea vector propio de *A*?

51.- Sea *A* una matriz de orden 3 cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda + 6$:

a) Calcular los valores propios de *A* y el determinante de *A*.

b) Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $AX = 0$ es compatible determinado.

ii) Existe una matriz *D* diagonal y una matriz *P* regular tal que $D = P^{-1}AP$.

52.- Dada una matriz *A* de orden 4 simétrica cuyos valores propios son 1, 3 y -5 doble:

i) Razonar si existe la matriz A^{-1} y, en caso afirmativo, calcule su determinante.

ii) ¿Cuánto vale el rango de la matriz $A + 5I_4$?

53.- Sea $A=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ con *m* número real. Se pide:

a) Estudiar la existencia de la matriz inversa de *A* según los valores del parámetro *m*. Calcula, cuando sea posible, A^{-1}.

b) Determinar los valores del parámetro *m* para que *A* sea diagonalizable.

c) Calcular el polinomio característico y los valores propios de la matriz *A*.

d) Para *m*=0 calcular una matriz diagonal *D* y una matriz *P* tales que $D = P^{-1}AP$.

54.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular los valores propios de *A*.

b) Calcular los vectores propios de *A*.

c) ¿Es *A* diagonalizable? En caso afirmativo, calcular una matriz regular *P* y una matriz diagonal *D* tales que $D = P^{-1}AP$.

d) Calcular los valores propios de A^3.

FORMAS CUADRÁTICAS

1.- Considerar la forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ de matriz asociada

$$A_1=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\quad A_2=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}\quad A_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad A_4=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Expresar $Q(\mathbf{x})$ en forma polinómica.

b) Encontrar, por el método de valores propios, una expresión diagonal para $Q(\mathbf{x})$.

c) Clasificar $Q(\mathbf{x})$.

2.- Considerar la forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ de matriz asociada

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\qquad A_2=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad A_3=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Expresar $Q(\mathbf{x})$ en forma polinómica.

b) Encontrar, por formación de cuadrados, una expresión diagonal para $Q(\mathbf{x})$.

c) Clasificar $Q(\mathbf{x})$.

3.- Para la forma cuadrática $Q(x,y,z)=2x^2+5y^2+5z^2+4xy-4xz-8yz$ se pide:

a) Encontrar una expresión diagonal para Q.

b) Clasificar Q.

4.- Para cada una de las siguientes matrices, se pide:

a) Encontrar una matriz diagonal congruente con la matriz dada.

b) Clasificar la forma cuadrática que representa.

$$A_1=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\qquad A_2=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\qquad A_3=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

$$A_4=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ -1 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix}\qquad A_5=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\qquad A_6=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A_7=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 3 & -4\\ -2 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

5.- Clasificar según su signo las siguientes formas cuadráticas:

a) $Q(x, y) = 3x^2 - 4xy + 7y^2$.

b) $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$.

c) $Q(x, y) = 6xy - 2x^2 - 5y^2$.

d) $Q(x, y) = 4y^2 + 8xy$.

e) $Q(x, y, z) = y^2 + 2xy + 2yz$.

f) $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xz + 2xy + 4yz$.

g) $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xz + 2xy + 2yz$.

h) $Q(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy$.

i) $Q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$.

j) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

k) $Q(x, y, z) = -4x^2 + y^2 + 3z^2 + 3xz + yz$.

l) $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2xz + 3y^2 + 2z^2$.

m) $Q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 3z^2 - 3xy + 4yz - 2xz$.

n) $Q(x, y, z) = x^2 + 10y^2 + 6xy$.

o) $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$.

p) $Q(x, y, z, t) = 2xz - 3yt + 2xt - t^2$.

q) $Q(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2z^2 + 2xy + 4yz$.

r) $Q(x, y, z) = 2xy + 4yz - 4xz - x^2 - y^2 + 4z^2$.

6.- Demostrar que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.

7.- Determinar para que valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ las siguientes formas cuadráticas son semidefinidas indicando si es positiva o negativa.

a) $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + \alpha z^2 - 2xz$.

b) $Q(x, y, z) = x^2 + \alpha y^2 + \alpha z^2 + 2yz$.

8.- Clasificar según los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ la forma cuadrática de expresión $Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\beta yt + 2\beta xz$.

9.- Estudiar, según los valores del parámetro a, el signo de la forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

10.- Considerar la forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es definida negativa para algún valor del parámetro a?.

11.- Clasificar las siguientes formas cuadráticas restringidas:

a) $Q(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}xy$ sobre $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - \sqrt{2}y = 0\}$.

b) $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz + 4yz$ para los vectores $x + 2y - z = 0$, $2x - 3y + z = 0$.

c) $Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4xy + 2yz$ para los vectores $x - y + z = 0$.

d) $Q(x, y, z, t) = x^2 - z^2 + 2xz + xt + 2yz$ para los vectores $x + y - z = 0,\ y - t = 0$.

12.- Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ restringida a:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$.

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -z\}$.

13.- Clasificar $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ restringida a:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0\}$.

b) $S = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

14.- Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ sobre el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\}$.

15.- Considerar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = 4x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xz$. Se pide:

a) Encontrar una expresión diagonal para Q.

b) Clasificar Q según su signo.

c) Clasificar Q restringida a $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$.

16.- Considerar la forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde b es un parámetro real. Se pide:

a) Determinar su signo según los valores del parámetro b.

b) Determinar su signo restringida a los vectores de la forma $y = 2z$ para cualquier valor de b.

17.- Sea $Q(x,\, y,\, z) = y^2 - xy - xz - yz$. Se pide:

a) Encontrar una expresión diagonal para Q.

b) Clasificar Q.

c) Clasificar según los valores del parámetro α Q restringida al subconjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = \alpha z\}$.

18.- Sea $Q(x,\, y,\, z) = 2ax^2 + y^2 + z^2 + 4axz$, con $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

a) Clasificar Q según los valores del parámetro a.

b) Para a = -1, encontrar subconjuntos S_1 y S_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que Q restringida a S_1 sea definida positiva y Q restringida a S_2 sea definida negativa.

19.- Considerando la forma cuadrática $Q(x,y,z)$ representada por la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, responde razonadamente las siguientes cuestiones:

a) ¿La forma cuadrática Q admite la expresión $Q(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = -2\,\tilde{x}^2 - 2\,\tilde{y}^2 - 5\,\tilde{z}^2$?

b) Justificar si existe algún $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ para el que se verifique que $Q(x_0,y_0,z_0) > 0$.

c) Definir, si es posible, un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ en el que la forma cuadrática Q sea definida negativa.

20.- Dada la forma cuadrática $Q(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - 4z^2 + 4zy$. Se pide:

a) Calcular una expresión diagonal para Q.

b) Justificar si existe $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ tal que $Q(x_0,y_0,z_0) < 0$.

c) Estudiar el signo de Q restringida $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y - 2z = 0 \right\}$.

21.- Dada la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xz$:

a) Clasificar $Q(x, y, z)$.

b) ¿Puede ser $Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 + 2\bar{z}^2$ una expresión diagonal de $Q(x, y, z)$? Razonar la respuesta.

22.- Ante lo elevado del déficit público de un pais imaginario, el gobierno decide crear un nuevo impuesto T cuyo importe es función de los pagos (o devoluciones en su caso) por el impuesto de las personas físicas, R, y de los pagos por el impuesto del patrimonio, P, de tal manera que $T = 2R^2 + 4P^2 - 4RP$. El gobierno antes de ponerlo en marcha quiere asegurarse de que la recaudación por dicho impuesto será mayor que cero para cada individuo, es decir, no está dispuesto a devolver dinero a ningún contribuyente por este concepto.

Comprobar que el impuesto cumplirá su finalidad recaudadora con todos y cada uno de los contribuyentes.

23.- Los economistas de una empresa aseguran que la función de producción es del tipo: $P = L^2 + K^2 - 2LK$, siendo L y K el número de trabajadores y de máquinas respectivamente. Además se sabe que para que funcione cada máquina se necesitan dos trabajadores. Comprobar que efectivamente, P es una función de producción.

24.- Un inversionista estima que al invertir en tres valores, *A*, *B* y *C*, la cartera resultante tendrá una rentabilidad de $U(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1 x_2 + 6x_1 x_3$, siendo x_1, x_2 y x_3 las rentabilidades en el momento de la compra de cada valor *A*, *B* y *C* respectivamente.

a) Analizar si dicha cartera puede generar pérdidas.

b) Valorar cómo afecta a la respuesta anterior una situación económica en que los tres productos partiesen de la misma rentabilidad.

c) Si el inversionista sabe que la rentabilidad del producto *A* es el doble que la de *B*, ¿habrá ganancias?