1.- Para cada una de las siguientes situaciones, escribir un programa matemático que permita obtener su solución.

a) Una empresa produce tres bienes cuyos precios de mercado son: $p_1 = 16, p_2 = 12$ y $p_3 = 20$. Su función de costes es $C(q_1, q_2, q_3) = q_1^2 + 2q_2^2 + 3q_3^2 - 2q_1q_2 + 25$ donde q_1, q_2, q_3 representan las cantidades producidas de cada uno de los tres bienes. Obténgase las cantidades a producir de cada bien para maximizar el beneficio de la empresa.

b) El volumen de ventas V de un coche es función del número de anuncios en prensa, x, y del número de minutos de propaganda en TV, y. Estadísticamente se ha estimado que la relación entre las tres variables es $V = 12xy - x^2 - 3y^2$. Si un anuncio en la prensa vale 100 euros, un minuto en TV cuesta 1700 euros y el presupuesto en publicidad de la empresa es de 30000 euros, determinar la política óptima en publicidad.

c) Un sastre dispone de 160 metros cuadrados de tela de algodón y 240 metros cuadrados de tela de lana para hacer vestidos y abrigos. Para cada vestido se utilizan 1 metro cuadrado de tela de algodón y 3 metros cuadrados de tela de lana y para cada abrigo 2 metros cuadrados de tela de algodón y la misma cantidad de tela de lana. Suponiendo que se vende todo lo que se produce, calcular cuántos vestidos y abrigos debe hacer el sastre para obtener un ingreso máximo sabiendo que cada vestido se vende por 150 euros y cada abrigo por 210 euros.

d) En un hospital se quiere elaborar una dieta alimenticia para un determinado grupo de enfermos con dos alimentos A y B. Estos alimentos contienen tres principios nutritivos: N1, N2 y N3. Una unidad de A vale 1 euro y contiene 2 unidades de N1, 1 de N2 y 1 de N3. Una unidad de B vale 2,5 euros y contiene 1, 3 y 2 unidades de N1, N2 y N3 respectivamente. Un enfermo de este grupo necesita diariamente al menos 4, 6 y 5 unidades de N1, N2 y N3 respectivamente. Determinar las cantidades de alimentos A y B que dan lugar a la dieta de coste mínimo .

2.- Clasificar cada uno de los siguientes programas matemáticos y resolverlos gráficamente:

a) Optimizar $x^2 + y^2 + 8$

b) Optimizar $\sqrt[3]{x^2 + y^2 + 8}$

c) Optimizar $\sqrt[3]{x^2 + y^2 + 8}$

s.a: $y \geq x^2 - 2$

d) Optimizar $\sqrt[3]{x^2 + y^2 + 8}$

s.a: $\begin{cases} y \geq x^2 - 2 \\ y \leq 0 \end{cases}$

e) Optimizar $x + y$

s.a: $\begin{cases} y \geq x^2 \\ 2x + y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

f) Maximizar $x_1 + x_2$

s.a: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq -5 \end{cases}$

g) La función de utilidad de un consumidor viene dada por $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$, donde x_1 y x_2 representan las cantidades de los bienes 1 y 2 consumidas. Sabiendo que p_1 y p_2 son los precios unitarios de los bienes 1 y 2 y que el consumidor dispone de una renta R que debe consumir en su totalidad, calcular la cantidad a consumir de cada bien si el objetivo es maximizar la utilidad.

3.- Representar gráficamente los siguientes conjuntos e indicar si son o no convexos. En el caso de que sean convexos determinar sus vértices.

a) $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$

b) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x,\ x + y \geq 1\right\}$

c) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \leq x^2\right\}$

d) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y > x^2\right\}$

e) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\right\}$

4.- Indicar si las siguientes funciones son cóncavas o convexas en los conjuntos que se indican:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 10 + e^{x+y}$, en $\mathbb{R}^2$

b) $f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz$, en $\mathbb{R}^3$

c) $f(x, y) = ln(xy)$, en $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\right\}$

d) $q(K,L) = A\,K^{\alpha}L^{\beta}$, con A, α, $\beta > 0$, $\alpha+\beta < 1$, en $D = \left\{(K,L) \in \mathbb{R}^2 \mid K > 0, L > 0\right\}$

5.- Un consumidor dispone de una renta de 150 euros que gasta íntegramente en el consumo de dos bienes: yogures, cuyas cantidades denotamos por x_1 y refrescos, cuyas cantidades denotamos por x_2. Sabiendo que el precio de cada yogur es de 1,5 euros y el de cada refresco es de 2 euros, se pide:

a) Determinar si el conjunto formado por todas las combinaciones de consumo que el consumidor puede comprar es convexo o no. En caso de serlo, ¿cuáles son sus vértices?

b) Supongamos ahora que existe una oferta de promoción de modo que, por la compra de 10 o más yogures, el precio unitario de cada yogur es de 1 euro. ¿Es convexo el conjunto de combinaciones alcanzables?

6.- Consideremos un individuo cuya riqueza viene dada exclusivamente por los ingresos derivados de su trabajo, la cual distribuye entre dos bienes: trigo y horas de ocio. Sabiendo que puede trabajar un máximo de 24 horas al día, se pide:

a) Representar gráficamente el conjunto de combinaciones de consumo alcanzables si el salario por hora es w = 1 y el precio unitario del trigo es p = 1. (Represente las horas de ocio x_1 en el eje de abscisas y las unidades de trigo x_2 en ordenadas). ¿Es convexo el conjunto alcanzable?

b) Supongamos ahora que el salario sigue siendo w = 1 para las 8 primeras horas trabajadas, mientras que es w' = 1,5 para las restantes, las cuales se consideran horas extraordinarias. ¿Qué representación gráfica tiene ahora el conjunto alcanzable? ¿Es convexo?

7.- Un consumidor posee una renta diaria de 40 unidades monetarias para el consumo de dos bienes: tabaco (cuyas cantidades denotamos por x_1) y alimentos (cuyas cantidades denotamos por x_2). El precio unitario del tabaco es p_1 = 8 y el precio unitario de los alimentos es p_2 = 2.

a) Dibuje el conjunto de combinaciones de consumo que son alcanzables por parte del consumidor y deducir si es convexo o no.

b) Supongamos que el gobierno establece un impuesto de cuantía de t = 1 que grava el consumo a partir de la segunda unidad de tabaco. ¿Es convexo el conjunto alcanzable?

8.- El señor X es coleccionista de sellos y monedas, de manera que su nivel de satisfacción depende del número que tenga de ambos bienes. Concretamente, su utilidad está representada por la función: $u(x_1,x_2) = x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$, donde x_1>0 denota el número de sellos y x_2>0 la cantidad de monedas y $0 < \alpha < 1$. Se pide:

a) Deducir si la función de utilidad del señor X es cóncava o convexa.

b) Supongamos el valor $\alpha = \dfrac{1}{2}$ y sea la curva de nivel k. Represente gráficamente el conjunto de combinaciones de sellos y monedas que proporcionan al señor X un nivel de satisfacción mayor que k. ¿Es dicho conjunto convexo? ¿Cómo se interpreta la convexidad de dicho conjunto en términos de satisfacción?

9.- En la producción de automóviles, una empresa emplea como factores productivos el trabajo (L) y el capital (K). La función de producción viene representada de la forma: $Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$, donde Q indica el número de automóviles producidos, A es una constante positiva y α, β > 0.

a) Deduzca qué relación debe darse entre los parámetros α y β para que la función de producción sea cóncava.

b) Sean $A = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$. Deduzca el conjunto de combinaciones de trabajo y capital que permiten producir más de 50 automóviles y demuestre que es convexo. ¿Cómo interpreta la convexidad en términos de producción?

1.- Dada la función $f(x,y) = x\, Ln\, y$.

a) Determinar, si existen, los puntos críticos de *f*.

b) Determinar, si existen, los extremos locales de *f*.

2.- Dada la función $f(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + \ln(x^2 + y + 2)$, se pide:

a) Calcular los puntos críticos de *f*.

b) ¿Existen máximos relativos de *f*?

c) Clasificar los puntos obtenidos en el apartado a).

3.- Determinar si los puntos (0,0), (1,-1), $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right)$ son óptimos locales de la función $f(x,y) = x^3 + y^2 - x\,y$ en su dominio de definición.

4.- Dada $f(x,y) = x\,y^2$, estudiar si *f* puede alcanzar el valor máximo en los puntos (0, 2) y (2, 0).

5.- Dada $f(x,y) = x^2 - 8\,y$, estudiar la existencia de óptimos en su dominio.

6.- Determinar los óptimos locales de las siguientes funciones en su dominio de definición:

a) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$

c) $f(x,y) = x\,y^2$

d) $f(x,y) = x^2 - y^2$

e) $f(x,y) = (x - y)^4$

f) $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$

g) $f(x,y) = x^4 + 8x^2 + y^2 - 4y$

h) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$

i) $f(x,y) = xy$

j) $f(x,y) = x^2y - y^2$

k) $f(x,y) = e^{-x^2 - y^2}$

l) $f(x,y) = x\,y\,e^{x+2y}$

ll) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

m) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xy + 10 + e^{x+y}$

n) $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$

ñ) $f(x,y) = -x^2 - 5y^2 + 4y + 1$

o) $f(x,y) = \left(x - y + 1\right)^2$

p) $f(x,y) = \left(x - y\right)^4 + \left(y - 1\right)^2$

q) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

r) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

s) $f(x,y) = x^2y^2$

t) $f(x,y,z) = 3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 2yz + 6xz - 2xy$

u) $f(x,y,z) = x\,y\,z$ v) $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 16yz$

7.- Calcular los óptimos locales de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$ según los valores del parámetro real a.

8.- Determinar, si existen, los óptimos locales de $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3$.

9.- Calcular, si existen, los óptimos locales de la función $f(x,y) = y\,e^x - e^y$ en su dominio de definición.

10.- Sea la función $f(x,y) = ax^2 + by^2 - 4x + 2y + c$. Hallar el valor de los parámetros reales a, b y c para que el valor mínimo de esta función sea 10 y se alcance en el punto (2,-1).

11.- Sea $f(x,y) = x^3 - y^2 + 3\,x\,y$.

a) Determinar los óptimos locales de f en su dominio de definición.

b) Analizar si es convexo el programa: Maximizar $f(x,y)$ en $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x < -1\right\}$.

12.- Dada la función $f(x,y) = 9x^2 + y^2 + 6xy + 1$:

a) Determinar, si existen, los extremos locales de $f(x,y)$.

b) Los extremos calculados en el apartado a), ¿son globales?. Razonar la respuesta.

13.- Dada la función $f(x,y) = x\,y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$:

a) Determinar, si existen, los óptimos locales de $f(x,y)$.

b) ¿Existen óptimos globales de $f(x,y)$?. Razonar la respuesta.

14.- Dada la función $f(x,y,z) = -x^2 - 5x - y^2 + 2yz + 6y - 4z^2 - 4z - 14$:

a) Determinar, si existen, los extremos locales de $f(x, y, z)$.

b) ¿Existe máximo global y mínimo global de $f(x, y, z)$?. Razonar la respuesta.

15.- Dada la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

a) Estudiar la existencia de óptimos locales de $f(x, y)$ en su dominio de definición.

b) Analizar la existencia de óptimos globales de $f(x,y)$ en el conjunto $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0,\ y > 0\right\}$.

16.- Sea $f(x,y) = x^4 + x^2 + y^2 + x\,y + x + 2\,y$.

a) Determinar los óptimos locales de f en su dominio de definición.

b) ¿Son globales los óptimos del apartado a)?

17.- Un agricultor utiliza trabajo y fertilizantes como únicos factores para cultivar un campo, siendo x e y los costes de estos factores, respectivamente. Si el beneficio por unidad de superficie viene dado por la función $B(x,y) = 20x + 26y + 4xy - 4x^2 - 3y^2$, encontrar los valores de x e y que maximizan el beneficio.

18.- Una compañía fabrica un producto en dos factorías. El coste de producción de x unidades en la primera factoría es $c_1 = \frac{1}{5}x^2 + 40x + 5000$ y el coste de producción de y unidades en la segunda factoría es $c_2 = \frac{1}{4}y^2 + 20y + 1375$. Si el producto se vende a 150 euros la unidad, hallar la cantidad que debe producirse en cada factoría para maximizar el beneficio.

19.- Una empresa produce dos bienes con una función de coste $C(q_1,q_2) = \frac{3}{2}q_1^{\,2} + 3q_1q_2 + 2q_2^{\,2} + 34$. Sabiendo que puede vender estos bienes al mercado a unos precios $p_1 = 42$ y $p_2 = 51$, calcular los niveles de producción que proporcionan a la empresa el máximo beneficio.

20.- La función de coste total de un monopolista que produce dos bienes viene dada por $C(q_1,q_2) = \frac{1}{6}q_1^{\,2} - 10q_2 + 90$, donde q_1 y q_2 representan las cantidades producidas de dichos bienes. Supongamos que las demandas a las que se enfrenta la empresa son $q_1 = 680 - 5p_1 - 3p_2$ y $q_2 = 430 - 3p_1 - 2p_2$ donde p_1 y p_2 son los precios de cada uno de los bienes. Calcular los niveles de producción que proporcionan al empresario el máximo beneficio.

21.- Determinar el nivel de producción de un bien q y el nivel de empleo de factores x_1, x_2 con los que una empresa maximiza sus beneficios siendo $q(x_1,x_2) = ln x_1 + ln x_2$ la función de producción, $C(x_1,x_2) = 3x_1 + 2x_2 + 5$ la función de costes y p = 15 el precio unitario de venta del producto.

1.- Sea $f(x,y)=e^x+e^y$, se pide:

a) ¿Existe algún punto óptimo de *f*?.

b) Si se considera la función *f* sujeta a la restricción $x+y=2$, ¿existe algún punto óptimo?.

2.- Sea $f(x,y)=x^2+y^2$:

a) ¿Existe algún punto óptimo de *f*?.

b) Escribir una restricción de forma que los puntos obtenidos en a) no sean solución del problema restringido.

c) Si se considera la función *f* sujeta a la restricción $x+y=1$, ¿existe algún punto óptimo?.

3.- Sea la función $f(x,y,z)=x^2+y^2+bxy+az$, siendo *a* y *b* parámetros reales.

a) Estudiar para que valores de los parámetros *a* y *b*, el punto (1, 1, 1) es máximo, mínimo o no es extremo.

b) Obtener una relación entre los parámetros *a* y *b* que sea una condición necesaria para que el punto (1, 1, 1) sea un óptimo local de *f* sujeta a la restricción $x^2+y^2+z^2=3$.

4.- Comprobar que el punto (1, 0, 0) es solución del problema:

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimizar} & f(x,y,z)=x+y+x^2+y^2+z^2 \\ s.a: & x^2+y^2=1 \\ & x=1 \end{array}$$

Comprobar que el punto (1, 0, 0) no verifica las condiciones necesarias de primer orden de Lagrange. ¿Cuál es la razón de esta aparente contradicción?.

5.- Dado el programa

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & f(x,y)=x^2 \\ s.a: & x^4+2x^2y^2+y^2=4x^2 \end{array}$$

a) Escribir las condiciones de Lagrange del problema.

b) ¿Debe el punto $(0,0)$ satisfacer las condiciones de Lagrange para ser óptimo?

c) Calcular los candidatos a puntos óptimos.

d) Sabiendo que el conjunto factible es compacto (cerrado y acotado) determina los máximos y mínimos globales.

6.- Calcular los extremos locales de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ sujeta a la restricción $y+x^2=1$.

7.- Calcular los extremos locales de la función $f(x,y,z)=x+y+z$ sobre el elipsoide $x^2+2y^2+5z^2=1$.

8.- Calcular los extremos locales de la función $f(x,y,z)=x\,y\,z$ sujeta a la restricción $x+y+z=1$.

9.- Calcular los extremos locales de la función $f(x,y,z,t)=x^2+y^2+z^2+t^2$ sujeta a las restricciones: $2x+3y=6$, $4y-z=1$, $y+z+t=15$.

10.- Determinar los óptimos locales de las siguientes funciones sujetas a las restricciones que se indican:

a) $f(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2$

s.a: $x+y+z^2=4$

b) $f(x,y,z)=2x+y-z$

s.a: $x^2+y^2-z=0$

c) $f(x,y,z)=x^2-y+2z$

s.a: $x^2+y^2+4z^2=8$

d) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

s.a: $\begin{cases} x+y+z=14 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

e) $f(x,y,z)=-x^2+2y+z$

s.a: $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$

f) $f(x,y)=x+y$

s.a: $x^2+y^2=1$

g) $f(x,y)=2x^2+4y^2+2x$

s.a: $x^2+y^2=1$

h) $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+z^2$

s.a: $x^2+y^2=8$

i) $f(x,y)=x\,y$

s.a: $x^2+y^2=1$

j) $f(x,y)=x^2+y^2$

s.a: $ln(x\,y)=1$

11.- Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia de radio r.

12.- Dado el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & 3x+4y \\ s.a: & x^2+y^2=25 \end{array}$$

a) Determinar, si existen, los puntos críticos de la Lagrangiana del problema.

b) Clasificar los puntos críticos obtenidos en el apartado a).

c) ¿Podemos afirmar que los extremos obtenidos en el apartado b) son globales?

13.- Resolver el siguiente problema de optimización utilizando la técnica de los multiplicadores de Lagrange

$$\begin{array}{ll} Optimizar & x+y \\ s.a: & xy-1=0 \end{array}$$

14.- Sea $f(x,y,z)=x+2y+2z$:

a) Calcular, si existen, los óptimos locales de f en $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x+4z^2=5\right\}$.

b) Calcular, si existen, los óptimos locales de f en $T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+4z^2=6\right\}$.

15.- Sea $f(x,y)=\dfrac{y-x}{y}$. Estudiar la existencia de máximos y mínimos relativos condicionados a la restricción $x-y^2=1$.

16.- Dado el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} Optimizar & f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \\ s.a: & \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x-y+2z=1 \end{array} \end{array}$$

a) Determinar, si existen, los óptimos locales.

b) Analizar si se trata de óptimos globales. Razonar la respuesta.

17.- Para el problema

$$\begin{array}{ll} Optimizar & x+y-2z \\ s.a: & x^2+y^2+z^2=6 \end{array}$$

a) Calcular los puntos críticos y clasificarlos.

b) ¿Qué se puede decir acerca de la globalidad de los extremos?

18.- Sea el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} Optimizar & x^2y^2 \\ s.a: & xy+y=1 \end{array}$$

a) Determinar los puntos críticos de la función Lagrangiana del problema.

b) Clasificar los puntos obtenidos en el apartado anterior.

19.- Dado el problema

$$\begin{array}{ll} Optimizar & x^2-y^2 \\ s.a: & x^2+y^2=1 \end{array}$$

a) El conjunto factible ¿es convexo?, ¿es cerrado?, ¿es acotado? Justificarlo.

b) Hallar los puntos críticos de la función Lagrangiana asociada y clasificarlos.

c) Sin necesidad de volver a resolver el problema, y si el término independiente de la restricción es 1´1 en lugar de 1, contestar razonadamente a la pregunta: ¿los valores óptimos mejoran o empeoran?

20.- Determinar, usando la técnica de los multiplicadores de Lagrange, los extremos relativos condicionados del siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & y^2 + x^2 y - y + 10 \\ s.a: & y - x^2 = 0 \end{array}$$

21.- Dado el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy - a\,x - 2b\,y - 5x \quad (a, b \in \mathbb{R}) \\ s.a: & x = y \end{array}$$

a) Determinar las condiciones que deben cumplir los parámetros a y b para que el punto $(1,1)$ sea un punto crítico del programa.

b) Para $b = 1$, analizar el carácter del punto $(1,1)$.

22.- Dado el problema

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & f(x,y,z) = x^2 + y^2 \\ s.a: & 4x - 3y + 2z = 6 \end{array}$$

analizar la existencia de óptimos globales y calcularlos en su caso.

23.- Dado el programa

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & x^2 + y^2 \\ s.a: & y + x^2 = 1 \end{array}$$

a) Resolverlo por el método de Lagrange.

b) Sin resolver el programa $\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & x^2 + y^2 \\ s.a: & y + x^2 = 0,9 \end{array}$, analizar si los óptimos de este nuevo programa mejoran o empeoran respecto del programa del apartado anterior.

24.- Dado el programa

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & xy + z^2 \\ s.a: & 2x - y + z = 0 \end{array}$$

a) Calcular, si existen, los óptimos locales con el método de Lagrange.

b) Calcular, si existen, los óptimos globales.

25.- Dado el problema:

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & x-3y \\ s.a: & x-y^3=0 \end{array}$$

a) Utilizando el método de Lagrange calcular los candidatos a extremos locales.

b) Clasificar los puntos obtenidos en el apartado anterior.

26.- Dada la función $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$,

a) Calcular sus extremos relativos condicionados sobre el conjunto $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| y=x^2-1\right\}$.

b) ¿El punto $(0,-1)$ es máximo global del problema anterior? (Puede ayudar la representación gráfica del problema).

27.- Dado el programa

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & x\ln(y) \\ s.a: & y-yx=1 \end{array}$$

a) Calcular el valor de λ para que $(0,1,\lambda)$ sea punto crítico de la función Lagrangiana del problema.

b) Determinar si el punto $(0,1)$ es un extremo local del problema anterior.

28.- Considerando el problema

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & 10x^2-16xy+10y^2 \\ s.a: & x^2+y^2=2 \end{array}$$

a) Calcular sus puntos críticos.

b) Utilizando condiciones de segundo orden clasificar los puntos del apartado a).

c) Razonar sobre la globalidad de los puntos obtenidos en el apartado a).

29.- La función de utilidad de un consumidor es $U(x,y)=(x+2)(y+1)$ donde x e y representan las cantidades de los bienes 1 y 2 consumidos en un periodo de tiempo dado. Sea 4 u.m. el precio unitario del bien 1, 6 u.m. el precio unitario del bien 2 y 130 u.m. el presupuesto de que dispone el consumidor que se gasta totalmente. Se pide:

a) Calcular la cantidad a consumir de cada bien si el objetivo es maximizar la utilidad.

b) ¿Cuál es la variación que experimenta la utilidad máxima ante un cambio en la cantidad de presupuesto disponible?

30.- La función de producción de una empresa es $f(x,y,z) = xy + xz + yz$, siendo x, y, z la cantidad, en miles de unidades, de los tres inputs que utiliza.

a) Hallar la cantidad de cada input que maximiza la producción, sabiendo que deben consumirse 6000 unidades entre los tres.

b) ¿Qué variación experimentará la producción máxima si se debe consumir 6100 unidades entre los tres inputs?

31.- Una empresa produce y comercializa dos bienes, *X* e *Y*. El beneficio de la venta de dichos bienes está expresado por la función $B(x,y) = ln(x - 2)^2 + ln(y - 1)^3$ siendo x e y el número de unidades vendidas del bien *X* e *Y*, respectivamente. Se sabe que se dispone de 240 unidades de materia prima para producir ambos factores; cada unidad de bien *X* precisa 10 unidades de dicha materia prima para su fabricación y cada unidad de bien *Y* 20 unidades. La materia prima ha de agotarse en su totalidad en el proceso de fabricación. Se pide:

a) Escribir un programa matemático con el que se pueda calcular el número de unidades del bien *X* y del *Y* que se han de fabricar para que el beneficio sea máximo, suponiendo que se vende todo lo que se produce.

b) Resolver el programa matemático planteado.

c) ¿Qué precio máximo estaría dispuesta a pagar la empresa por una unidad adicional de materia prima? Justificar la respuesta.

32.- La población productiva de una pequeña ciudad se divide en dos grupos, uno fabrica el bien *A* y el otro el bien *B*. Ambos bienes se exportan en su totalidad, percibiendo 12.5 u.m. por unidad del bien *A* y 100 u.m. por unidad del bien *B*. Las posibilidades de producción anual se hallan limitadas por la función de transformación $10x + 4y^2 = 10000$, siendo x el número de unidades producidas del bien *A* e y el número de unidades producidas del bien *B*. Se pide:

a) Calcular el número de unidades anuales de cada bien con las que se maximiza el ingreso conjunto de los productores de esta ciudad.

b) Sin volver a resolver el problema, razonar cómo variaría el ingreso máximo si se considerara la función de transformación $10x + 4y^2 = 10001$.

33.- Una empresa produce un bien a partir de dos factores productivos *X* e *Y* siendo su función de producción $q(x,y) = 40x + 60y - x^2 - 3y^2$, donde x representa la cantidad de factor *X* e y la de factor *Y*. Los precios unitarios de los factores productivos son 1 y 2 unidades monetarias, respectivamente. Se pide:

a) Sabiendo que los costes de los factores productivos han de ser de 26 u.m., calcular la cantidad de cada factor productivo que se ha de utilizar si se quiere maximizar la producción. Calcular también la producción máxima.

b) Sin volver a resolver el problema, ¿cuánto variará la producción máxima si el coste de los factores productivos ha de ser de 26´1 u.m.?

34.- Una empresa emplea dos factores A y B, en cantidades x e y, para obtener un determinado producto. La función de costes viene dada por $C(x,y)=5x^2-8xy+5y^2+10$. Fijado el nivel de producción en 8 unidades, la tecnología utilizada para alcanzar dicho nivel viene determinada por $Q(x,y)=x^2+y^2$.

a) ¿Qué combinación de factores minimizará el coste de la empresa para el nivel de producción fijado? ¿Cuál sería en este caso el coste de la empresa?

b) Si la empresa se planteara aumentar en una pequeña cantidad su nivel de producción, ¿disminuirían con ello los costes? Razonar la respuesta.

35.- Las preferencias de un consumidor que demanda cantidades de dos bienes están representadas por la función de utilidad: $u(x_1,x_2)=x_1^{1/2}x_2$, donde x_1 indica la cantidad del bien 1 y x_2 la cantidad del bien 2. Dicho consumidor dispone de una renta monetaria de R euros que gasta íntegramente en el consumo de los bienes. Sabiendo que los precios son p_1, p_2:

a) Determine las cantidades que demandará el consumidor de ambos bienes en función de los precios y de la renta, de manera que su utilidad sea máxima. ¿Qué combinación elegirá si los precios son $p_1=5$, $p_2=4$ y la renta es $R=150$?

b) ¿Cuánto variará la utilidad del consumidor si dispusiese de una renta igual a 151 euros?

c) Suponga ahora que las preferencias del consumidor vienen representadas por la función de utilidad: $u(x_1,x_2)=x_1^{1/2}+x_2$. Determine la nueva combinación de cantidades que elegirá cuando los precios y la renta son, respectivamente, $p_1=5$, $p_2=4$, $R=150$.

1.- Dados los problemas lineales:

P1) $Min\ (Máx)\ -2x_1 + 6x_2$

$$\begin{aligned} s.a \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ & -x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

P2) $Min\ (Max)\ -x_1 + 2x_2$

$$\begin{aligned} s.a \quad & x_1 - x_2 \le 4 \\ & 2x_1 - x_2 \ge -3 \\ & x_1 - 2x_2 \le 4 \end{aligned}$$

P3) $Min\ (Max)\ -x_1 + 2x_2$

$$\begin{aligned} s.a \quad & x_1 \le 4 \\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1 - 2x_2 \le -2 \end{aligned}$$

a) Representar el conjunto factible, la curva de nivel cero de la función objetivo y la dirección de crecimiento de la misma en el punto (0,0).

b) A partir de la representación gráfica, determínense los vértices y analícese la existencia de solución.

c) Resuélvase cada problema indicando los valores extremos de la función objetivo y el punto o puntos donde se alcanzan.

2.- Para los siguientes enunciados se pide:

a) Definir las variables del problema, la función objetivo a optimizar y el conjunto de soluciones factibles.

b) Representación gráfica del conjunto de oportunidades.

c) Dicho conjunto ¿es vacío?, ¿es convexo?, ¿es cerrado?, ¿es acotado?

d) ¿Cómo influyen los resultados anteriores en la existencia y unicidad de solución?

e) Resuelve gráficamente indicando el valor óptimo de la función objetivo.

E1) Una determinada empresa fabrica dos tipos de productos P1, P2. Cada unidad producida requiere la utilización de dos tipos diferentes de máquinas M1, M2. El producto P1 requiere dos horas de la máquina M1 y una hora de la máquina M2, mientras que el producto P2 requiere de M1 durante una hora y 30 minutos y de 15 minutos de M2. Teniendo en cuenta las máquinas disponibles de ambos tipos, se establece que a lo largo de la semana se podrán conseguir 1200 horas de trabajo en M1 y 375 de M2. Cada unidad de P1 deja un beneficio de 600 u.m. y cada unidad de P2 de 300 u.m. El propietario de la empresa desea conocer la cantidad de unidades que se deben producir de cada producto en orden a maximizar la ganancia semanal.

E2) Cierto fabricante produce sillas y mesas para lo que requiere la utilización de dos secciones de producción: la sección de montaje y la sección de pintura. La producción de una silla requiere una hora de trabajo en la sección de montaje y dos horas en la sección de pintura. Por su parte, la fabricación de una mesa precisa de tres horas de montaje y una hora de pintura. La sección de montaje sólo puede estar nueve horas diarias en funcionamiento, mientras que la sección de pintura sólo ocho horas. El beneficio que se obtiene produciendo mesas es doble que el de sillas. ¿Cuál ha de ser la producción diaria de mesas y sillas que maximice el beneficio?

E3) Una compañía minera produce lignito y antracita. Por el momento es capaz de vender todo el carbón producido, la ganancia por tonelada de lignito y antracita es de 4 y 3 u.m. respectivamente. El procesado de cada tonelada de lignito requiere de 3 horas de trabajo de la máquina de cortar carbón y otras 4 de lavado. Por otra parte el procesado de una tonelada de antracita requiere para las mismas tareas 4 y 2 horas respectivamente. Las horas que diariamente tiene disponibles la compañía para cada una de esas actividades son 12 y 8 respectivamente. Además, se supone que al menos se deben producir diariamente 2 toneladas de carbón. Plantear un problema de programación lineal con el fin de maximizar la ganancia y resolverlo.

E4) Un nutricionista asesora a un individuo que sufre una deficiencia de hierro y vitamina B y le indica que debe de ingerir al menos 2400 mgr de hierro, 2100 mgr de vitamina B-1 y 1500 mgr de vitamina B-2 durante cierto período de tiempo. Existen dos píldoras de vitaminas disponibles, la marca A y la marca B. Cada píldora de la marca A contiene 40 mgr de hierro, 10 mgr de vitamina B-1, 5 mgr de vitamina B-2 y cuesta 6 céntimos. Cada píldora de la marca B contiene 10 mgr de hierro, 15 mgr de vitamina B-1 y 15 mgr de vitamina B-2 y cuesta 8 céntimos. Plantear y resolver un problema lineal que permita calcular la combinación de píldoras que debe de comprar para cubrir sus requerimientos nutricionales al menor coste.

3.- Resolver gráficamente los siguientes programas lineales y caracterizar el tipo de solución (única, múltiple–segmento, múltiple-semirrecta).

a) *Máx(Mín)* $2x_1 + 3x_2$

$$\text{s.a: } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) *Máx(Mín)* $3x_1 + 2x_2$

$$\text{s.a: } \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

c) *Máx(Mín)* $2x_1 + 3x_2$

$$\text{s.a: } \begin{cases} 7x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

d) *Máx(Mín)* $x_1 - \frac{1}{2}x_2$

$$\text{s.a: } \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 \geq -3 \\ -x_1 + 2x_2 \geq -4 \end{cases}$$

4.- Resolver utilizando el método simplex.

a) *Máx* $2x_1 + 3x_2$

$$\text{s.a: } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) *Máx* $3x_1 + 2x_2$

$$\text{s.a: } \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

c) $\text{Máx } 3x_1 + x_2$

$$\text{s.a: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 20 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

d) $\text{Min } -5x_1 - 6x_2 + 6x_5$

$$\text{s.a: } \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 200 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_4 = 300 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_5 = 200 \\ x_i \ge 0 \quad i = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$

5.- Comprobar que los siguientes problemas lineales no tienen solución óptima, identificando si tal circunstancia se da por no haber soluciones factibles o ser conjunto factible no acotado en la dirección de crecimiento.

a) $\text{Máx } 4x_1 + 3x_2$

$$\text{s.a: } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

b) $\text{Máx } x_1 + x_2 + x_3$

$$\text{s.a: } \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - 2x_2 \ge -2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6.- Escribir en forma estándar y la primera tabla del algoritmo del símplex para los siguientes problemas:

a) $\text{Máx } 7x_1 + 9x_2 + 9x_3$

$$\text{s.a: } \begin{cases} x_1 \le 5 \\ x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge x_2 + x_3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

b) $\text{Mín } x_1 + x_2 + x_3$

$$\text{s.a: } \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - 2x_2 \ge -2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

c) $\text{Máx } x_1 + 2x_2 - x_3$

$$\text{s.a: } \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 \le 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

d) $\text{Mín } 2x_1 - 3x_2 - x_3$

$$\text{s.a: } \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_3 \ge -3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

e) $\text{Mín } 12x_1 + 10x_2 + 10x_3$

$$\text{s.a: } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

f) $\text{Mín } -x_1 - 2x_2 + \frac{3}{2} x_3$

$$\text{s.a: } \begin{cases} x_2 - x_3 \le 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 \ge 12 \\ x_2 - 2x_3 \ge -1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

7.- Para el problema de programación lineal:

$$\text{Máx} \quad x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.a:} \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

La matriz formada por las columnas primera y segunda (x1, x2) ¿es una matriz básica del problema? En caso afirmativo, calcular la solución factible básica y la tabla asociada a dicha solución. A partir de la tabla anterior, ¿qué puede decirse de la solución óptima del problema?

8.- Completar la siguiente tabla de un problema de minimización e interpretarla para los diferentes valores del parámetro *t*:

		c_b	t	2	1	0
c_b	x_b	b	x_1	x_2	x_3	x_4
t	x_1	2	1	2	0	-1
1	x_3	3	0	2	1	-2
		z-c				

9.- El problema de programación lineal:

$$\text{Mín} \quad -5x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.a:} \quad \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq b_1 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq b_2 \\ x_i \geq 0, \ i = 1,2,3 \qquad b_j \geq 0, \ j = 1,2 \end{cases}$$

tiene como solución óptima la indicada en la tabla:

		c_b					
c_b	x_b	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-5	x_1	30	1	p	6	1	0
0	x_5	10	0	q	-12	-1	1
		z-c	0	a	-27	d	e

a) Calcular las componentes del vector $b = (b_1, b_2)$ que proporcionan dicha solución, sabiendo que la solución básica inicial estaba formada por las variables x_4 y x_5.

b) Completar la tabla.

10.- Sea el problema

$$\begin{aligned} &Máx \quad 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ &\text{s.a:} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ x_i \geq 0, \ \ i = 1,\ldots,5 \end{cases} \end{aligned}$$

Sabiendo que la siguiente tabla es la correspondiente a la solución factible básica (1, 0, 4, 0, 0), completarla e interpretarla.

		c_b					
c_b	x_b	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1		1	$1/2$	0	$1/2$	
2	x_3	4	0	1	1		1
			2		2	1	1
		z-c	0		0	1	1

11.- Considerando que $b_2 \geq 0$ en el problema:

$$\begin{aligned} &Máx \quad c_1x_1 + 2x_2 + x_3 \\ &\text{s.a:} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + a_{13}\ x_3 \leq 8 \\ 2x_1 + 4x_3 \leq b_2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

y conociendo los siguientes valores de la tabla óptima (x_4, x_5 variables de holgura)

		c_b					
c_b	x_b	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	x_2					1/2	
	x_1	3					
		z-c			7	1	1

Sin aplicar el método símplex, calcula c_1, a_{13}, b_2 y completa la tabla.

12.- Un agricultor posee una parcela de 640 m^2 para dedicarla al cultivo de árboles frutales: naranjos, perales y manzanos. Se pregunta de qué forma repartirá la superficie de la parcela entre las tres variedades para conseguir el beneficio máximo sabiendo que cada naranjo precisa 16 m^2, cada peral 4 m^2 y cada manzano 8 m^2; dispone de un total de 900 horas de trabajo/año, precisando cada naranjo de 30 horas/año, cada peral de 5 horas/año y cada manzano de 10 horas/año. Los beneficios unitarios son de 50, 25 y 20 u.m. por cada naranjo, peral y manzano respectivamente.

13.- Un veterinario aconseja a un granjero dedicado a la cría de pollos, una dieta mínima para la alimentación de las aves compuesta de 3 unidades de hierro y 4 u. de vitaminas. El granjero sabe que cada kilo de maíz proporciona 2,5 u. hierro y 1 u. de vitaminas, cada kilo de harina de pescado 3 u. de hierro y 3 u. de vitaminas, y cada kilo de cierto pienso sintético 1 u. de hierro y 2 u. de vitaminas. El granjero se pregunta por la composición de la dieta óptima que minimice el costo de la alimentación, sabiendo que los precios del maíz, harina de pescado y pienso sintético son, respectivamente de 20, 30 y 16 unidades monetarias.

14.- Una empresa elabora dos productos, A y B, que vende a unos precios de 3 y 4 unidades monetarias, respectivamente. A la hora de elegir la cantidad producida se ha de tener en cuenta las siguientes condiciones: 1) El mercado demanda una cantidad mínima de 300 unidades de cada producto; 2) La cantidad producida de A tiene que ser como máximo el triple de la de B; 3) la producción máxima del producto B es de 600 unidades. Formular y resolver el problema de programación lineal que permita determinar las cantidades que se han de producir para maximizar los ingresos teniendo en cuenta las condiciones expuestas anteriormente.

15.- Una compañía de transportes dispone de 720 u.m. para la adquisición de nuevos vehículos. Después de un estudio previo se han seleccionado dos tipos de vehículos para su compra. El vehículo A tiene una capacidad de 12 Tm y alcanza una velocidad de 65 km/h, siendo su coste 12 u.m., mientras que le vehículo B tiene una capacidad de 22 Tm, con una velocidad de 50 km/h y un coste de 18 u.m. El vehículo A requiere sólo un conductor en cada turno de trabajo y suponiendo que el vehículo A realiza tres turnos por día, puede circular 18 h/día; mientras que el vehículo B requiere un equipo de dos hombres circulando 21 h/día con tres turnos de trabajo por día. La compañía dispone actualmente de 210 conductores únicamente y no quiere aumentar su número. Se pide formular un problema de programación lineal con el fin de encontrar el número vehículos de cada tipo que deben comprarse si lo que la compañía desea es maximizar su capacidad de tonelaje por kilómetro y día.

16.- Una empresa puede producir tres artículos diferentes usando dos materias primas, la A y la B. Para fabricar una unidad del primer artículo necesita 200 unidades de A y 300 unidades de B; para el segundo necesita 150 de A y 240 de B; y para el tercero necesita 100 de A y 150 de B. El proveedor establece como condición para suministrar estas materias primas una demanda mínima para A de 5600 unidades y para B de 8700 unidades. Sabiendo que el coste unitario para producir el primer artículo es 90 unidades monetarias (u.m.), el del segundo 80 u.m y el del tercero 50 u.m., se trata de calcular que cantidades de estos tres artículos deben producirse para minimizar el coste total.

a) Plantear el correspondiente problema de programación lineal.

b) Presentar la primera tabla del símplex correspondiente a dicho problema.

c) Plantear el problema dual y resolver por el símplex dicho problema dual.

d) Sobre la base de la solución del dual, obtener la solución del problema original.

e) Ofrecer la interpretación económica tanto de la solución del problema primal, como la del problema dual.

17.- Una empresa de materiales de construcción produce, entre otras cosas, tres tipos de cemento que necesitan para su elaboración ser procesados a través de dos departamentos: preparado y mezclado. Los requerimientos técnicos de una tonelada de cemento en cada departamento así como sus beneficios netos vienen dados en la siguiente tabla:

Tipo de cemento	Horas de Preparado	Horas de Mezclado	Beneficio neto
C1	6	3	3
C2	3	4	1
C3	5	5	5

Si las horas semanales que cada departamento puede dedicar a la producción de cemento se han evaluado en 45 para el departamento de preparado, 30 para el de mezclado. (Se supone que el número de toneladas a fabricar no tiene por qué ser un número entero). Se pide:

a) Plantear el problema de programación lineal que determine la producción óptima de cemento, es decir, número de toneladas de cada tipo de cemento para maximizar el beneficio.

b) Calcular el beneficio máximo, indicando la combinación de materiales de construcción que producen dicho beneficio máximo.

c) El departamento de marketing desea saber si resultaría rentable la producción de un nuevo tipo de cemento cuyo beneficio por tonelada en u.m. se ha estimado en 6 y que necesita de 6 horas de procesado en el departamento de preparado y 5 horas en el de mezclado por cada tonelada producida. ¿Será rentable fabricar ese nuevo cemento?, ¿en qué cantidad?.

d) Responder a las cuestiones planteadas en el apartado anterior cuando el beneficio en unidades monetarias por tonelada del nuevo cemento es 5, teniendo en cuenta además que si se produce el nuevo cemento, la empresa está segura de mejorar su imagen de cara a sus clientes.

18.- Un granjero posee 100 hectáreas para cultivar trigo y alpiste. El coste de la semilla de trigo es de 4 euros por hectárea y la semilla de alpiste tiene un coste de 6 euros por hectárea. El coste total de la mano de obra es de 20 y 10 euros por hectárea respectivamente. El beneficio esperado es de 110 euros por hectárea de trigo y 150 euros por hectárea de alpiste. Si no se desea gastar más de 480 euros en semillas ni más de 1500 euros en mano de obra, se pide:

a) Plantear el problema que permita maximizar los beneficios.

b) ¿Cuántas hectáreas deben de dedicarse a cada uno de los cultivos para obtener un beneficio máximo? (Utilizar el algoritmo símplex para dar la respuesta)

c) El granjero se plantea si es interesante cultivar un nuevo cereal que tiene un coste de 5 euros por hectárea y un coste total de mano de obra por hectárea de 15 euros, esperando un beneficio de 130 euros por hectárea. Razonar la respuesta.

d) Determinar el beneficio máximo y la producción con la que se obtendría si la nueva actividad dejara un beneficio de 135 euros.

e) Determinar el beneficio máximo y el plan de cultivos que lo proporciona si estuviera dispuesto a invertir 500 euros en semillas.

19.- Una empresa produce y comercializa dos artículos A y B que le proporcionan unos beneficios unitarios de 30 y 50 u.m. respectivamente. Los artículos A y B se obtienen mediante transformación de los minerales P y Q, de tal forma que cada unidad de A requiere 2 unidades de P y 3 de Q. Cada unidad de B requiere 4 unidades de P y 3 de Q. Diariamente se dispone de 60 unidades de P y 80 de Q. Suponiendo que se vende toda la producción, se pide:

a) Plantear el problema para maximizar el beneficio, su problema dual y escribir la primera tabla del simplex del problema primal.

b) Sabiendo que (utilizando el algoritmo de máximo) la última tabla del símplex es:

		c_b				
c_b	x_b	b	x_1	x_2	x_3	x_4
50	X_2	$10/3$	0	1	$1/2$	$-1/3$
30	X_1	$70/3$	1	0	$-1/2$	$2/3$
		$2600/3$	30	50	10	$10/3$
		z-c	0	0	10	$10/3$

Calcular el intervalo de disponibilidad del mineral Q para el que la tabla anterior siga siendo óptima.

c) ¿Cuánto estaría dispuesta a pagar la empresa por 3 unidades más de mineral Q?. ¿y por 30?

d) Dar la solución del problema dual.

e) ¿Sería interesante fabricar un nuevo producto C que consumiera 3 unidades de mineral P y 4 de mineral Q, con un beneficio unitario de 45 u. m.?. En caso afirmativo, determina el programa óptimo de producción.

20.- Una compañía juguetera fabrica dos tipos de juguetes de madera: camiones y trenes. Un camión se vende por 27 unidades monetarias (u.m.) y usa materia prima por valor de 10 u.m. Además, la compañía ha evaluado en 14 u.m. los costes indirectos y por mano de obra invertidos en la fabricación de cada camión. Para cada tren las cantidades anteriores son 21, 9 y 10 u.m., respectivamente. La fabricación de los camiones y los trenes precisa de dos tipos de mano de obra: acabado y carpintería. Un camión necesita dos horas de acabado y 1 hora de carpintería. Un tren necesita una hora de acabado y otra de carpintería. Cada semana, la compañía puede obtener toda la materia prima que precise, pero sólo dispondrá de 100 horas de acabado y 80 de carpintería. La demanda de trenes es ilimitada, pero se podrán vender un máximo de 40 camiones a la semana. Formular y resolver un programa matemático que refleje esta situación y le permita a la compañía conocer cómo debe planificar la producción semanal para maximizar el beneficio (ingresos menos gastos).

21.- Una tienda vende rotuladores a 20 céntimos de euro y libretas a 30 céntimos de euro. Disponemos de 150 céntimos de euro y pretendemos comprar, por lo menos, las mismas libretas que rotuladores.

a) ¿Cuál será el número máximo de productos que podemos comprar?

b) Determinar el intervalo de variación del coste de las libretas para que la tabla del apartado anterior permanezca óptima.

c) Determinar el intervalo de variación del coeficiente “número de libretas a comprar” para que la tabla del apartado a) permanezca óptima.

d) Suponga que la restricción “pretendemos comprar, por lo menos, las mismas libretas que rotuladores” se cambia a “la diferencia entre el número de rotuladores y libretas sea menor o igual a tres unidades”; en este caso, ¿cuál es la nueva solución?

22.- El director de una empresa observa que su único vendedor nunca supera los 5 millones mensuales en ventas y por ello ha decidido contratar dos nuevos vendedores que le ayuden. Después de un periodo de prueba el director llega a la conclusión que a cada nuevo vendedor deberá pagarle una comisión del 10% sobre las ventas que consiga y que a uno de los nuevos vendedores le exigirá unas ventas mínimas mensuales de 1 millón y, por tal exigencia, conseguirá una comisión extra del 5% de las ventas. Además por experiencia sabe que el vendedor inicial venderá igual o más que los dos nuevos vendedores juntos. Sabiendo que el vendedor inicial cobra el 30% sobre las ventas que él mismo consiga, la dirección de la empresa desea conocer el beneficio máximo mensual que puede obtener con los tres vendedores en el supuesto que se cumpliesen todas las circunstancias anteriores. En tal caso, indicar la distribución mensual de las ventas entre los tres vendedores.

23.- Un joven dispone de 74 € para ocio cada 4 semanas, que se gasta en su totalidad. Todo su gasto se realiza en cervezas, ir al cine o ir a cenar. El coste de una cerveza es 1€, el de la entrada de cine 6 € y cada vez que va a cenar se gasta 10 €. Por costumbre, va al menos una vez al cine por semana y nunca va a cenar más de una vez en las 4 semanas. La satisfacción que obtiene por ir al cine es similar a la de 5 cervezas y la de ir a cenar es equivalente a 15 cervezas. Advertencia: notar que el dinero disponible se gasta en su totalidad.

a) Obtener el problema de programación lineal que permite maximizar la satisfacción y resolverlo por el método del simplex.

b) Hallar el problema dual del problema inicialmente planteado, y sus soluciones.

c) Ver en que rango se puede mover la satisfacción obtenida con cada cerveza para que no cambien sus costumbres.

d) ¿Cuánto debe variar su disponibilidad monetaria para que deje de gastar en las tres alternativas de ocio?

24.- Una empresa produce y comercializa dos productos P1 y P2 los cuales obtiene mediante la utilización de dos talleres A y B que fabrican indistintamente los componentes de ambos productos.

La capacidad mensual disponible del taller A es tal que, en caso de dedicarla exclusivamente a la fabricación de componentes de P1, se obtendrían los suficientes para dar lugar a 50 unidades de ese producto. En el caso contrario (dedicación exclusiva a los componentes de P2) se podrían obtener 100 unidades de P2. Por otro lado, la capacidad mensual del taller B es suficiente para proporcionar, como máximo, el número de componentes necesarios para la obtención de un total de 60 unidades de producto terminado, ya sea únicamente P1, P2, o una combinación de ambos.

Los precios de venta unitarios de P1 y P2 son, respectivamente de 42 y 35 u.m. siendo los costes unitarios de los mismos de 30 y 25 u.m.

De acuerdo a lo anterior la gerencia desea conocer:

a) ¿Cuál es el programa de producción que conduciría a un resultado óptimo para la gestión mensual?

b) ¿En qué condiciones la empresa estaría interesada en dedicar parte de sus talleres para una actividad distinta de P1 y P2?

25.- Una empresa se dedica a la elaboración de dos productos P1 y P2 que le proporcionan beneficio de 50 u.m./m^3 y 60 u.m./m^3 respectivamente. Dicha elaboración da lugar a dos tipos de gases tóxicos G1 y G2 que son evacuados a la atmósfera en la proporción indicada en la siguiente tabla:

	Emisión de gas toxico en litros por m^3	
Tipo de gas tóxico	P_1	P_2
G_1	24	36
G_2	8	12

Debido a la aparición de nuevas normas en materia de polución la emisión diaria de G1 y G2 no deberá superar los 600 y 800 litros respectivamente.

El director de producción de la citada empresa mediante la aplicación de un mecanismo anti-polución en el proceso de fabricación de P1 y/o P2 puede eliminar los gases tóxicos G1 y G2 en un 75% y en un 50% respectivamente, independientemente del proceso a que lo aplique.

La dirección desea saber cuál sería el programa que conduciría a obtener las cantidades de P1 y P2 que se deben obtener diariamente con el fin de optimizar el beneficio sin incumplir la normativa. La utilización del citado mecanismo en cualquiera de los procesos de fabricación produce una disminución de 10 u.m. en el beneficio obtenido por m^3 del producto correspondiente.

26.- Una empresa fabrica tres tipos de productos X, Y y Z cuyos procesos productivos implican la utilización de tres secciones de acuerdo con los tiempos empleados en la siguiente tabla junto con las disponibilidades mensuales de las diferentes secciones y el coste estimado por el tiempo ocioso en cada una de ellas:

	Tiempo utilizado por cada unidad de producto		
Sección	X	Y	Z
S_1	2h	2h	2h
S_2	2h	-	6h
S_3	4h	1h	-

Sección	Disponibilidad máxima mensual en S_i	Coste de la hora ociosa en S_i
S_1	228	12 u.m.
S_2	198	8 u.m.
S_3	279	4 u.m.

Sabiendo que los beneficios unitarios de X, Y y Z son respectivamente de 8, 9 y 13 u.m. se desea conocer el programa que conduciría a obtener el beneficio mensual óptimo.

27.- Plantea el dual del siguiente problema, y si es posible, calcula gráficamente su solución.

$$\text{Máx} \quad x_1 + x_2 + x_4$$
$$\text{s. a:} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4\,x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_4 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0; \quad x_3 \le 0; \quad x_4 \ \textit{libre} \end{cases}$$

28.- Se sabe que la solución óptima del problema lineal

$$\text{Máx} \quad x_1 + 3x_2$$
$$\text{s. a:} \quad \begin{cases} x_1 + 4\,x_2 \le 100 \\ x_1 + 2x_2 \le 60 \\ x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

está formada por las variables x_1, x_2, x_5, (holgura de la tercera restricción), y que $B^{-1} = A_b^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Plantea el problema dual del problema y su solución.

b) Análisis de sensibilidad para b_1 (primera componente del lado derecho de las restricciones).

c) Análisis de sensibilidad para c_2 (coeficiente en la función objetivo asociado a la variable x_2).

d) Se valora la posibilidad de fabricar un nuevo producto x_n de modo que el problema resultante se escribe:

$$\textit{Máx} \quad x_1 + 3x_2 + 4x_n$$
$$\text{s.a:} \quad \begin{cases} x_1 + 4\,x_2 + 4x_n \le 100 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_n \le 60 \\ x_1 + x_2 + 3x_n \le 50 \\ x_1, x_2, x_n \ge 0 \end{cases}$$

Sin resolver por el símplex “el nuevo problema” calcula la solución óptima y el valor máximo de la función objetivo.

1.- Comprobar que la función $y = C_1 senx + C_2 x$ es solución de la ecuación diferencial $(1 - x cotgx)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.

2.- a) Comprobar que la función $y = 2x + Ce^x$ es solución de la ecuación diferencial $y' - y = 2(1 - x)$. Hallar la solución particular que pasa por el punto (0, 3).

b) Comprobar que la función $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$. Hallar la solución particular que pasa por los puntos (0, 0) y (1, 0).

3.- Considerar la ecuación diferencial $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$.

a) Resolver la ecuación usando separación de variables

b) Si denominamos por *C* a la constante de integración, demostrar que cuando dicha constante toma el valor -1, no hay valores reales de *x* e *y* que satisfagan la solución.

c) Si bien *C* es una constante arbitraria de integración, demostrar que solamente para $C > 0$ se obtiene una relación implícita entre *x* e *y*.

4.- Considerar la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{3}}$.

a) Determinar la solución general de la ecuación dada.

b) Comprobar que la ecuación anterior con valor inicial $y(0)=0$ no tiene solución única.

c) ¿Porqué este ejemplo no contradice el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales con valor inicial dado?

5.- a) Demostrar que la ecuación diferencial $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 - y^2}$ es homogénea.

b) Resolverla utilizando la sustitución adecuada.

6.- a) Probar que es exacta la ecuación diferencial: $\dfrac{e^{\sqrt{x+y^2}}}{2\sqrt{x+y^2}}dx + \dfrac{y\,e^{\sqrt{x+y^2}}}{\sqrt{x+y^2}}dy = 0$.

b) Encontrar la solución general de la ecuación anterior.

c) Demostrar, a partir de la solución encontrada, que la función $x = 3 - y^2$ es una solución.

7.- Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $y' = 2x(y+3)$ 2) $y' = \dfrac{x^2 - y^2}{2xy}$

3) $\left(2\,x\,y^3+1\right)dx+\left(3\,x^2\,y^2-\dfrac{1}{y}\right)dy=0$

4) $\left(-3\,x^2+y\right)dx+\left(x-1\right)dy=0$

5) $y'=\dfrac{y\,\text{sen}\,x-\text{sen}\,y}{x\,\cos y+\cos x}$

6) $y'=\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-2\,x\,y}{x^2}$

7) $y\,x^{y-1}\,dx+x^y\,\ln x\,dy=0$

8) $(6xy^2+2x^2)dx+(4y^3+6x^2y)dy=0$

9) $y'=2xe^{-x^2}-2yx$

10) $(1+x^2)y'-4xy+(1+x^2)^2(2-x)=0$

11) $x\dfrac{d\,y}{d\,x}-y+3\,x^3\,y-x^4=0$

12) $y\ln(1+x)\,dx-\dfrac{dy}{1+3x^2}=0$

13) $y'\left(x^2+1\right)=x^2+2\,x\,y+1$

14) $\dfrac{1}{x}\,\text{sen}\,y\,dx+\ln x\cos y\,dy=0$

15) $y'=\dfrac{x^2\,y-y}{y+1}$

16) $\left(-3\,x+y+6\right)dx+\left(x+y+2\right)dy=0$

17) $(1+x)^3\,dy-x^2\,y\,dx=0$

18) $x^3\,dx+(y+1)^2\,dy=0$

19) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$

20) $\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-x\,y\right)dy=0$

21) $\left(x\,y+y^2+x^2\right)dx-x^2\,dy=0$

22) $y'+5\,y=t^3\,e^t$

23) $\left(x^3+x\,y^2\right)dx+\left(x^2\,y+y^3\right)dy=0$

24) $\left(1+2\,e^{\frac{x}{y}}\right)dx+2\,e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$

25) $y'=\dfrac{2+y\,e^{xy}}{2\,y-x\,e^{xy}}$

26) $y'=\dfrac{2\,x\,y-y^2}{x^2}$

27) $\left(x^3+1\right)y'+6\,x^2\,y=x\,e^x$

28) $\left(1+e^x\,y+x\,e^x\,y\right)dx+\left(x\,e^x+2\right)dy=0$

8.- Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\left(\ln(y+1)-3\,x^2\,y-6\,e^{2x}\right)dx+\left(\dfrac{x}{1+y}-x^3+\cos y\right)dy=0$.

b) $\left(\dfrac{y}{3+x}-y^2+sen\,x\right)dx+\left(\ln(x+3)-2\,x\,y-e^{y-1}\right)dy=0$.

9.- Hallar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales que verifica la condición inicial dada:

1) $y' = \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$

2) $\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{z}{x} = x$, $z(1) = 0$

3) $x\,y' - 4\,y + 2\,x^2 + 4 = 0$, $y(1) = 1$

4) $y\,dx + (x - y\,e^y)\,dy = 0$, $y(1) = 0$

5) $y' = \dfrac{\cos x}{2y}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

6) $(1 + e^x)\,y\,y' = e^x$, $y(0) = 1$

7) $y' = -\dfrac{2xy}{x^2 + y}$, $y(0) = 2$

8) $\left(2x + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$, $y(1) = 1$

9) $y' = y\,(1 + x)$, $y(0) = 1$

10) $(x^2 + 1)\,y' + 4\,x\,y = x^2 + 2\,x - 1$, $y(0) = 3$

11) $y' = \dfrac{-x}{y}$, $y(2) = 2$

12) $y' = \dfrac{2\,x\,y}{x^2 - y^2}$, $y(1) = 1$

10.- Hallar la curva que pasa por el punto $(1,-1)$ y verifica la ecuación diferencial:

$$\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right) dx = \left(1 - \ln x\right)\,dy\,.$$

11.- Dada la ecuación $y' = x\,y\,Ln\,x$:

a) Calcular su solución general.

b) Calcular la solución particular que verifica $y(1) = 1$.

12.- Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

a) $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x^2} - x\,e^{1/x} = 0 \\ y(1) = e \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' = \dfrac{1 + 2x}{e^y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\,x^2 - y}{x - 4\,y} \\ y(1) = 2 \end{cases}$

13.- Dada la ecuación diferencial $y\,dx + x\,(x^2\,y - 1)\,dy = 0$, se pide:

a) Comprobar que no es exacta.

b) Comprobar que al multiplicar la ecuación diferencial por la función $m(x,y) = \dfrac{y}{x^3}$ se obtiene una ecuación diferencial exacta.

c) Resolver la ecuación diferencial obtenida en el apartado anterior.

14.- Dada la ecuación diferencial $2\,x\,y\,dx + \left(5\,x^2 + 2\,y\right)dy = 0$, se pide:

a) Comprobar que no es exacta.

b) Comprobar que al multiplicar la ecuación diferencial por la función y^4 se obtiene una ecuación diferencial exacta.

c) Encontrar la solución implícita de la ecuación diferencial obtenida en el apartado anterior.

15.- Considerar la ecuación diferencial $\left(3xy-4y^2\right)dx+\left(2x^2-6xy\right)dy=0$.

a) Determinar m de forma que al multiplicar la ecuación diferencial por la función xy^m se obtenga una ecuación diferencial exacta.

b) Obtener la solución implícita de la ecuación diferencial obtenida en el apartado a).

c) Hallar la curva que pasa por el punto (1,1) y verifica la ecuación diferencial obtenida en el apartado a).

16.- ¿Cuánto deben de valer los parámetros m, n y p para que $y(x)=C_1+C_2x+C_3e^{4x}$ sea solución de la ecuación diferencial $y'''+m\,y''+n\,y'+p\,y=0$?

17.- a) Escribir una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes cuya solución sea $y(x)=C_1+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}$.

b) Resolver la ecuación diferencial: $y'''+2y''+y'=3x^2-18$.

18.- a) Determinar una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes cuya solución general sea $C_1e^{-3x}+C_2\,x\,e^{-3x}+C_3$.

b) Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal completa obtenida al considerar 27 como término independiente de la ecuación calculada en el apartado a).

19.- Escribir una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes cuya solución general sea: $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+C_3$.

20.- Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

1) $y'''+y'+10y=0$
2) $y'''-6y''+11y'-6y=0$
3) $y''-3y'+2y=0$
4) $y''+4y=0$
5) $y''+5y'+6y=0$
6) $y'''-y''-2y'=0$
7) $y^{(4}-4y''=0$
8) $y^{(4}+y'''=0$
9) $y''-y'-12y=0$
10) $y'''+4y''-3y'-18y=0$
11) $y''-y=0$
12) $y''+4y'+4y=0$
13) $y''-5y'+6y=0$
14) $y''-2y'+2y=0$
15) $y''+y=0$
16) $y''+3y'+2y=0$

21.- Determinar, a partir del ejercicio anterior, la forma de una solución particular de las ecuaciones:

1) $y''' + y' + 10y = 12e^{2x}$
2) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$
3) $y'' - 3y' + 2y = (e^{-x} + e^{x})^2$
4) $y'' + 4y = \cos 2x$
5) $y'' + 5y' + 6y = 9e^{2x}\cos x$
6) $y''' - y'' - 2y' = \operatorname{sen} x$
7) $y^{(4} - 4y'' = 3x^2e^x + 5x^4$
8) $y^{(4} + y''' = 3 - x$
9) $y'' - y' - 12y = 36\, x\, e^{3x}$
10) $y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 32 + e^x e^x$
11) $y'' - y = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + 10\cos 2x$
12) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$
13) $y'' - 5y' + 6y = 6x + 1$
14) $y'' - 2y' + 2y = e^x$
15) $y'' + y = e^{-2x}\operatorname{sen} x$
16) $y'' + 3y' + 2y = 3x + 1$

22.- Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

1) $y'' - 2y' + y = (x^2 + 3)\, e^{2x}$
2) $y'' + y' - 2y = 2(3x + 1)\, e^x$
3) $y' - 5y = 3e^x - 2x + 1$
4) $y'' - 4y' + 4y = x$
5) $y''' + 3y'' + 3y' + y = x - 5$
6) $y^{(4} + y''' - y'' - y' = 9x^2 - 6x + 1$
7) $y''' - y' = 4$
8) $y''' + y' = e^x$
9) $y'' - 4y = 8\operatorname{sen} 2x - 16\cos 2x$
10) $y' - y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$
11) $y'' - 4y' + 13y = 40\operatorname{sen} x$
12) $y''' - 3y' + 2y = xe^x$
13) $y'' - y = 5 + e^x$
14) $2y''' - 10y'' + 12y' = 24x$
15) $y''' + y'' = 6x + 4$
16) $y''' + 6y'' + 8y' = 16x$
17) $y''' - 3y'' + 3y' = y$
18) $y''' - 4y'' - 11y' - 6y = 5e^x + 6x$
19) $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$
20) $y'' - y = e^x(x^2 - 1)$
21) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3e^{2x}$
22) $y'' + y' + y = 1 + x + x^2$
23) $y^{(4} = y$
24) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^x - x^2$
25) $y'' - 4y' + 5y = x - 4$

23.- Para las siguientes ecuaciones diferenciales hallar la solución verifique las condiciones iniciales dadas:

1) $y''' - 4y'' + 4y' = 100$, $y(0) = 50$, $y'(0) = 30$, $y''(0) = 40$.

2) $y''' - y'' + y' - y = 100\, e^{x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.

3) $y'' + y = x \cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4) $y'' - 4y' + 3y = e^{x}\,(x+1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \dfrac{9}{4}$.

5) $y'' + 9y = x^2 + \cos(3x)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

6) $y''' + y' = 2\operatorname{sen} x + 3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.

7) $y^{(4} + y'' = 24x$, $y(0) = 7$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 21$.

8) $y''' + y' = x - 10\,e^{x}\operatorname{sen} x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = -6$.

24.- Considerar la ecuación diferencial: $y^{(4} + 2y''' - 15y'' = x + (x+1)\,e^{x}$. Se pide:

a) Calcular la solución general de la ecuación homogénea asociada.

b) Calcular una solución particular de la ecuación completa.

c) Calcular la solución general de la ecuación completa.

d) Calcular la solución particular de la ecuación completa que verifica: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \dfrac{-3}{25}$, $y'''(0) = \dfrac{-47}{180}$.

25.- Sea P el precio de un bien, $D(P) = 8 - 2P$ la demanda y $S(P) = 2 + P$ la oferta. El precio $P = P(t)$ varía con el tiempo, siendo su ritmo de crecimiento el doble del exceso de demanda, $D(P) - S(P)$. Si inicialmente el precio era de 5 unidades monetarias, calcular el precio en cada instante y determinar qué ocurrirá a largo plazo.

26.- El ritmo al que cambia el precio de venta de un producto respecto a su demanda está dada por la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y - xe^{x}}{x}$, donde x representa la demanda e y representa el precio de venta. Hallar el precio de venta del producto, en función de la demanda, para el caso de que éste sea de 4 euros cuando la demanda es de 2 unidades.

27.- Sabiendo que el ritmo de cambio del coste, C, respecto del número de unidades fabricadas, q, viene dado por la ecuación diferencial $\dfrac{dC}{dq} = -\dfrac{3q^2C + 1}{q^3 + 2}$. Hallar la función de coste $C(q)$, sabiendo que el coste de producir 2 unidades es 10 euros.

28.- Si S representa la oferta de un cierto producto y p el precio unitario de venta, la razón a la que cambia la oferta respecto al precio viene dada por la expresión $\frac{S(2p+3)}{p(p+3)}$. Hallar la oferta en función del precio, sabiendo que si el precio es de 2 unidades monetarias la oferta es de 20 unidades.

29.- Sea $C(q)$ la función que representa el coste total de producir q unidades de un cierto producto. La razón a la que varía el coste marginal en cualquier punto es constante y su valor es -2. Sabiendo que cuando se produce 1 unidad el coste es de 3 unidades monetarias y cuando se producen 2 unidades el coste es de 7 unidades monetarias, hallar la función de coste total.

30.- Sea I el ingreso por la venta de q unidades de cierto producto. Sabiendo que la razón a la que cambia el ingreso respecto al número de unidades vendidas es $\frac{I}{q}+\frac{24-q^2}{q}$, hallar el ingreso en función del número de unidades vendidas, sabiendo que éste es de 21 unidades monetarias cuando se venden 5 unidades.

31.- Si B representa el beneficio diario (en euros) de un comerciante cuando vende q unidades de un producto, el ritmo al que cambia dicho beneficio respecto al número de unidades vendidas es $\frac{qB+B^2}{q^2}$. Hallar el beneficio en función del número de unidades vendidas, sabiendo que cuando se venden 10 unidades diarias el beneficio es de 500 euros.

32.- La demanda $D(t)$ y la oferta $S(t)$ de cierto bien están relacionadas con el precio $p(t)$ de dicho bien en cada instante, verificándose:

$$D(t) = 125 - 0.5\ p'(t) - 0.8\ p''(t)$$

$$S(t) = 75 + 1.5\ p'(t) + 0.2\ p''(t)$$

Calcular la trayectoria temporal del precio de equilibrio sabiendo que $p(0)=45$ y $p'(0)=35$.

33.- Consideremos un modelo de mercado con expectativas de precios en el que la demanda $D(t)$, la oferta $S(t)$ y el precio $p(t)$ verifican las ecuaciones:

$$D(t) = 16 - 4\,p(t) + 6\,p'(t) + 4\ p''(t)$$

$$S(t) = -8 + 8\ p(t) - 4\ p'(t) + 6\ p''(t)$$

Calcular la trayectoria temporal del precio de equilibrio para $p(0) = 3$ y $p'(0) = -2.5$.