MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1.- Calcular, si es posible, los productos AB y BA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.- Comprobar que la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

verifica la ecuación $X^2 - 7X + 10I_2 = 0_2$, siendo $0_2 \in M_2$ la matriz nula.

3.- Calcular una matriz $C \in M_2$ tal que $AC = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

4.- Hallar todas las matrices que conmuten con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.- Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcular $3A^t A - 2I_2$.

b) Resolver la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.- Sea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determinar las condiciones que han de cumplir los parámetros a y b para que la matriz A sea:

a) Regular.

b) Simétrica.

7.- Determinar todas las matrices $A \in M_2$ tales que $A^2 = 0_2$.

8.- Hallar las matrices $A \in M_2$ tales que:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9.- Dada $A \in M_n$ probar que las matrices $B = A^t A$ y $C = AA^t$ son matrices simétricas.

10.- Una matriz $A \in M_n$ se dice *idempotente* si $A^2 = A$. Probar que si $A \in M_n$ es idempotente se tiene:

a) $B = I_n - A$ es idempotente.

b) $AB = BA = 0_n$, con B la matriz del apartado a).

11.- Demostrar que si $A \in M_n$ es regular, entonces A^{-1} es también regular. Calcular $\left(A^{-1}\right)^{-1}$.

12.- Sean $A, B, C \in M_n$. Si A es regular y $AB = AC$ demostrar que entonces $B=C$. Si A es singular y $AB = AC$, ¿deducimos entonces que $B = C$?. Razonar la respuesta.

13.- Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones:

a) El producto de matrices triangulares es triangular.

b) Si $A \in M_n$ es tal que $A^4 = 0_n \Rightarrow A = 0_n$.

c) $A \in M_n \Rightarrow A^t A = AA^t$.

d) Sean $A, B \in M_n$ tales que $AB = 0_n \Rightarrow A = 0_n$ o $B = 0_n$.

e) Sean $A, B \in M_n$ regulares, entonces $A+B$ es regular.

14.- Sean $A, B \in M_n$ si $AB = A$ y $BA = B$, entonces $A^2 = A$ y $B^2 = B$.

15.- Calcular:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$ l) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 10 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 6 \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ n) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ o) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

p) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ q) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ r) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

s) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ t) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ u) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ -1 & a & 1 & 1 & . & . & 1 \\ -1 & -1 & a & 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -1 & -1 & -1 & -1 & . & . & a \end{vmatrix}$

v) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & n-1 \\ 2 & 3 & 4 & . & . & n \\ 3 & 4 & 5 & . & . & n+1 \\ . & . & . & . & . & . \\ n-2 & n-1 & n & . & . & 2n-2 \\ n-1 & n & n+1 & . & . & 2n-1 \end{vmatrix}$

16.- Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 4 & x & 6 \\ 5 & 7 & 12 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$.

17.- Demostrar que:

a) $$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = -2(x^3+y^3)$$

b) $$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = x^2z^2$$

18.- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ calcular $\left|A - \lambda I_3\right|$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

19.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ obtener el valor de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+4 & y+4 & z+4 \end{vmatrix}$.

20.- Sean $A, B \in M_4$ con $|A|=3$, $|B|=-2$. Calcular:

a) $|2A|$.

b) $|\frac{1}{2}B|$.

c) $|BA^t|$.

d) $|(BA)^t|$.

e) $|(B^tA^tB)^t|$.

21.- Sean $A, B \in M_n$ tales que AB es regular. Probar que entonces A y B son regulares.

22.- Sea $A \in M_n$ tal que $A^m = I_n$ para algún $m \in \mathbb{N}$, probar que entonces A es regular. Calcular A^{-1}.

23.- Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz A que verifica $P^{-1}AP = B$.

24.- Dadas $A, B \in M_n$ y $t \in \mathbb{R}$, verificar que:

a) Si $A \neq B$ podemos encontrar $C \in M_n$ tal que $CA = CB$.

b) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA$.

c) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \Leftrightarrow AB = BA$.

d) La matriz $A + A^t$ es simétrica.

e) $|tA| = t^n |A|$.

f) $\exists A, B \ni |A+B| \neq |A| + |B|$.

g) Si A regular $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

25.- Estudiar si las siguientes matrices son inversibles. En caso afirmativo calcular la matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

26.- Estudiar la existencia de la matriz inversa según los valores de $m \in \mathbb{R}$. Calcular la matriz inversa en los casos que sea posible.

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

27.- Estudiar para que valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$, las siguientes matrices no tienen inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1-m & 2 \\ 3 & 2-m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -m & 5 \\ 2 & 3-m \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2-m & 3 & 1 \\ 1 & 1-m & 4 \\ 0 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} m & 9 & 4 \\ 4 & m & -1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ -1 & 3 & m-1 \end{pmatrix}$$

28.- Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad H=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

29.- Calcular según los valores del parámetro *a*, el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & a \end{pmatrix}$$

30.- Resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=3 \\ 5x-y+2z=5 \\ -3x+3y-4z=1 \end{array}\right|$ b) $\left.\begin{array}{l} x+2y=5 \\ x-3y=-5 \\ 3x+y=5 \end{array}\right|$ c) $\left.\begin{array}{r} x+y-2z+t+3s=1 \\ 2x-y+2z+2t+6s=2 \\ 3x+2y-4z-3t-9s=3 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=4 \\ 2x+5y-2z=3 \end{array}\right|$ e) $\left.\begin{array}{r} x+y+2z+t=3 \\ x+3z=5 \\ 3x+y+8z+t=1 \end{array}\right|$ f) $\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=0 \\ x+3y+2z+4t=0 \\ 2x+z-t=0 \end{array}\right|$

g) $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ 2x+y=0 \\ 3x+y-z=0 \end{array}\right|$ h) $\left.\begin{array}{r} x+y+2z+t=5 \\ 2x+3y-z-2t=2 \\ 4x+5y+3z=7 \end{array}\right|$ i) $\left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ y+z=1 \\ x+z=0 \\ y-z=1 \end{array}\right|$

j) $\left.\begin{array}{r} x+y+5t=0 \\ x+z+6t=0 \\ y+z+7t=0 \\ x+y+2z+13t=0 \end{array}\right|$

31.- Discutir según los valores del parámetro m y resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} mx+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x+3y-z=0 \end{array}\right|$ b) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=m \\ x+(1+m)y+z=2m \\ x+y+z=4 \end{array}\right|$ c) $\left.\begin{array}{r} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{r} mx+y+z=m \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{array}\right|$ e) $\left.\begin{array}{r} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{array}\right|$ f) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z=8 \\ 5x+4y+5z=14 \\ 4x+3y+mz=11 \end{array}\right|$

g) $\left.\begin{array}{r} x+my-z=0 \\ 2x-3y-2z=0 \\ x+2y+z=0 \end{array}\right|$ h) $\left.\begin{array}{r} mx+y+3z=3 \\ x-y-z=0 \\ 5x-3y-2z=6 \end{array}\right|$ i) $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-1 \\ x+y+3z=4 \\ 5x-y+mz=10 \end{array}\right|$

j) $\left.\begin{array}{r} 4x+2y+z=mx \\ 2x+4y+2z=my \\ 2x+4y+8z=mz \end{array}\right|$

32.- Discutir y resolver cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de los parámetros a y b:

a) $\left.\begin{array}{r} ax+y=a+2 \\ 3y=6 \\ bx+z=b+3 \end{array}\right|$ b) $\left.\begin{array}{r} -x+2y-2z=0 \\ 2x-y+az=b \\ 2x-2y+3z=1+b \end{array}\right|$ c) $\left.\begin{array}{r} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{r} a^2x+b^2y+z=a^3-b^2+1 \\ ax+by+z=a^2-b+1 \\ x+y+z=a \end{array}\right|$ e) $\left.\begin{array}{r} x+ax=b \\ ax+by=b \\ ax+ay=b \end{array}\right|$ f) $\left.\begin{array}{r} 2x+ay+z=7 \\ x+ay+z+t=b \\ x+2ay+t=-1 \\ bx+ay=b \end{array}\right|$

33.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 3 & 2 & 4m \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ con $m\in\mathbb{R}$:

a) ¿Para que valores del parámetro m, es la matriz A inversible?.

b) Resolver el sistema lineal $AX=0_3$ utilizando el apartado anterior.

34.- Considerar el sistema lineal $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1+a \\ 2+a & 1+2a & 4+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ 3+2a \end{pmatrix}$ con $a\in\mathbb{R}$.

a) Discutir en función del parámetro a el sistema anterior.

b) Calcular, cuando sea posible, sus soluciones.

35.- Considerar el sistema lineal $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & 2\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutir el sistema anterior y resolverlo cuando sea posible.

36.- Considerar las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con a un parámetro real.

a) Discutir en función de a el sistema $AX = B$.

b) En los casos que sea posible, calcular las soluciones de $AX = B$.

37.- En un mercado con competencia perfecta las funciones de oferta y demanda de los bienes están dadas por:

$Q_{1d} = 10 - 2P_1 + 4P_2$ $\qquad$ $Q_{2d} = 10 + 5P_1 - 3P_2$

$Q_{1s} = 20 + 3P_1 - 2P_2$ $\qquad$ $Q_{2s} = 30 - 7P_1 + 5P_2$

Donde Q_{id} es la cantidad demandada de bien *i*, Q_{is} es la cantidad ofertada de bien *i* y P_i es el precio de mercado del bien *i*, para *i*=1,2. Calcular los precios para los que el mercado está en equilibrio y la cantidad demanda y ofertada de cada bien en esta situación.

38.- La condición de equilibrio para el precio de tres bienes en un mercado queda determinado por la siguiente condición:

$$\begin{aligned} 11P_1 - P_2 - P_3 &= 31 \\ -P_1 + 6P_2 - 2P_3 &= 26 \\ -P_1 - 2P_2 + 7P_3 &= 24 \end{aligned}$$

Siendo P_1, P_2 y P_3 los precios de estos tres bienes. Calcular el precio de equilibrio de cada bien.

39.- Para la construcción de un almacén se necesita una unidad de hierro y ninguna de madera. Para la construcción de un piso se necesita una unidad de cada material y para la construcción de una torre se necesitan 4 unidades de hierro y una de madera. Si poseemos una reserva de 14 unidades de hierro y 4 de madera, se pregunta:

a) ¿Cuántos almacenes, pisos y torres podemos construir de forma que utilicemos todas las reservas?

b) Sabiendo que el precio de un almacén es de 1.200.000 €, el de un piso 400.000€ y el de una torre 800.000€, ¿hay alguna combinación que cueste 7.200.000€?

40.- Halla un número de tres cifras sabiendo que éstas suman 9, que si al número dado se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198, y que la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos.

41.- Dos amigos invierten 20.000€ cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés, una cantidad B al 5% de interés y el resto al 6%. El otro invierte la misma cantidad A al 5%, la B al 6% y el resto al 4%. Determina las cantidades A, B y C sabiendo que el primero obtiene unos intereses de 1.050€ y el segundo de 950€.

42.- Un cajero automático contiene 95 billetes de 10€, 20€ y 50€ y un total de 2.000€. Si el número de billetes de 10€ es el doble que el número de billetes de 20€, calcular cuantos billetes hay de cada tipo.

43.- Se dispone de tres cajas *A*, *B, C* con monedas de 1€. Se sabe que en total hay 36€. El número de monedas de *A* excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada 1 moneda de la caja *B* a la caja *A*, ésta tendrá el doble de monedas que *B*. Averigua cuántas monedas había en cada caja.

44.- Un especulador adquiere 3 objetos de arte por un precio total de 2 millones de euros. Vendiéndolos, espera obtener de ellos ganancias del 20%, del 50% y del 25%, respectivamente, con lo que su beneficio sería de 600.000€. Pero consigue más, pues con la venta obtiene ganancias del 80%, 90% y 85% respectivamente, lo que le da un beneficio total de 1,7 millones de euros. ¿Cuánto le costó cada objeto?

45.- Una empresa dispone de 27.200 euros para actividades de formación de sus cien empleados. Después de estudiar las necesidades de los empleados, se ha decidido organizar tres cursos: A, B, C. La subvención por persona para el curso A es de 400€, para el curso B es de 160€ y de 200€ para el curso C. Si la cantidad que se dedica al curso A es cinco veces mayor que la correspondiente al B, ¿cuántos empleados siguen cada curso?

46.- Un fabricante produce 42 electrodomésticos. La fábrica abastece a 3 tiendas que demandan toda la producción. En una cierta semana, la primera tienda solicitó tantas unidades como la segunda y la tercera juntas, mientras que la segunda tienda pidió un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por la primera tienda más la tercera parte de lo pedido por la tercera. ¿Qué cantidad solicitó cada una?

47.- Una inversionista le afirma a su corredor de bolsa que sus acciones son de tres compañías: Delta Airlines, Hilton Hotels y McDonald's y que hace 2 días su valor bajó 350€ pero que ayer aumentó 600€. El corredor recuerda que hace dos días el precio de las acciones de Delta Airlines bajó 1€ por acción y el de las de Hilton Hotels bajaron 1.5€, pero el precio de las acciones de McDonald's subió 0.5€. También recuerda que ayer el precio de las acciones de Delta subió 1.5€ por acción, el de las de Hilton Hotels bajó otros 0.5€ por acción y las de McDonald's subieron 1€. Demuestre que el corredor no tiene suficiente información para calcular el número de acciones que posee la inversionista en cada compañía, pero que si ella dice que tiene 200 acciones de McDonald's, el corredor puede calcular el número de acciones que tiene en Delta y Hilton.

CONJUNTO $\mathbb{R}^n$

1.- Considerar los vectores u = (1, -3, 2) y v = (2, -1, 1) de $\mathbb{R}^3$:

a) Escribir, si es posible, los vectores (1, 7, -4) y (2, -5, 4) como combinación lineal de u y v.

b) ¿Para qué valores de x es el vector (1, x, 5) una combinación lineal de u y v?

2.- Los vectores $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (2,1,3)$ y $v_3 = (5, 2, 10)$ de $\mathbb{R}^3$, ¿son linealmente independientes? En caso de no serlo hallar la relación de dependencia.

3.- Dados los vectores $u_1 = (2,-1,0)$, $u_2 = (0,1,-1)$ y $u_3 = (8,3,1)$ de $\mathbb{R}^3$, estudiar si son linealmente dependientes o independientes.

4.- Dados los vectores $u_1 = (1,0,-1,0)$, $u_2 = (2,0,3,-1)$, $u_3 = (1,1,-1,1)$ y $u_4 = (2,1,-2,1)$ de $\mathbb{R}^4$, estudiar si son linealmente independientes. En caso de no serlo hallar la relación de dependencia.

5.- Dados los vectores de $\mathbb{R}^4$ $v_1 = (1,1,0,m)$, $v_2 = (3,-1,n,-1)$ y $v_3 = (-3,5,m,-4)$, determinar los valores que han de tomar los parámetros m y n para que los tres vectores sean linealmente dependientes.

6.- Sean u = (-1, 0, 0), v = (1, 1, 0) y w = (-1, 1, -1) vectores de $\mathbb{R}^3$:

a) Demostrar que {u, v, w} es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Hallar las coordenadas respecto de esta base del vector cuyas coordenadas respecto de la base canónica son 1, 0, 2.

c) Hallar las coordenadas respecto de la base canónica del vector $a = 3u - v + 5w$.

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CUADRADAS

1.- Sea $A \in M_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de A y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vector propio de A asociado a λ. Probar que:

a) $\alpha\lambda$ es valor propio de la matriz αA para cualquier $\alpha \in R$ y **x** es vector propio de αA asociado a $\alpha\lambda$.

b) λ^p es valor propio de A^p y **x** es vector propio de A^p asociado a λ^p, con $p \in \mathbb{N}$.

c) $|A| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ es valor propio de A.

d) Si A es regular entonces $\lambda \neq 0$, además λ^{-1} es valor propio de A^{-1} y **x** es vector propio de A^{-1} asociado a λ^{-1}.

2.- Sean $A, B \in M_n$ matrices semejantes. Probar que:

a) $|A| = |B|$.

b) A^p es semejante a B^p para cualquier $p \in \mathbb{N}$.

c) Si A es regular entonces B es regular y A^{-1} es semejante a B^{-1}.

3.- Sea $A \in M_n$. Probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico.

4.- a) Sean $A, B \in M_n$ matrices regulares. Probar que las matrices AB y BA tienen los mismos valores propios.

b) Sea $A \in M_n$ una matriz idempotente ($A^2 = A$). Probar que A sólo puede tener como valores propios los valores 0 y 1.

5.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Estudiar si 3 es o no valor propio de A.

b) ¿Son los vectores (1,1,1) y (0,0,1) vectores propios de A? En caso afirmativo, buscar el valor propio asociado.

6.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Estudiar si el vector $(-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ es o no un vector propio de la matriz *A*. En caso afirmativo determinar el valor propio asociado.

b) Lo mismo para el vector (-1,0,1).

7.- Para cada una de las siguientes matrices indicar razonadamente si es diagonalizable o no. Además:

a) En caso afirmativo, dar una matriz semejante diagonal y la matriz regular de paso.

b) En caso negativo, calcular los valores propios y los vectores propios asociados a cada valor propio.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_9 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

8.- Una matriz $A \in M_2$ verifica las siguientes condiciones: $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y (2,-1) es vector propio de *A* asociado al valor propio $\lambda = -2$. Hallar la matriz *A* indicando si es diagonalizable o no. En caso afirmativo dar una matriz semejante diagonal *D* y la matriz de paso *P* tal que $D = P^{-1}AP$.

9.- Calcular una matriz $A \in M_3$ simétrica que verifique: *v*=(1,-1,0) es vector propio de *A*, $A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y |*A*| =0. Calcular A^{50}.

10.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular los valores de los parámetros *a* y *b* para que el vector (2,-1) sea vector propio de *A* asociado al valor propio 2.

11.- Encontrar una matriz $A \in M_3$ de valores propios -1, 1, 2 con vectores propios asociados (1,0,-1), (-1,1,0), (3,-3,1) respectivamente.

12.- Encontrar una matriz $A \in M_3$ de valores propios $\lambda_1 = 1$ simple y $\lambda_2 = 2$ doble con vectores propios asociados (1,1,0), (1,0,0) respectivamente .

13.- Encontrar una matriz $A \in M_3$ con valores propios $\lambda_1 = -1$ doble, $\lambda_2 = 3$ simple y con vectores propios asociados (1,0,2), (-1,0,0) y (0,1,1) respectivamente.

14.- Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular los valores de los parámetros *a* y *b* para que *A* tenga como valores propios 1 y -1. ¿Es *A* una matriz diagonalizable?.

15.- Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) ¿Para qué valores del parámetro *a* $\lambda = -2$ es valor propio de *A*?.
b) ¿Para qué valores del parámetro *a* es la matriz *A* diagonalizable?.

16.- Determinar una matriz $A \in M_3$ tal que $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que sus vectores propios sean los vectores de $\mathbb{R}^3$ no nulos de los conjuntos $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, z = 0\}$.

17.- La matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$ admite como vectores propios (-1,-1,0), (1,0,-2) y $(0,-1,1)$ asociados a los valores propios 3, 0 y 3/2 respectivamente. Se pide:

a) Hallar los elementos desconocidos de *A*.
b) ¿Es *A* diagonalizable?. En caso afirmativo, diagonalizarla.

18.- Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar sus valores y vectores propios. ¿Es *A* diagonalizable?.

b) Comprobar que se cumple que el determinante de la matriz A es el producto de sus valores propios.

19.- Comprobar que las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ tienen los mismos valores propios pero sin embargo no son semejantes.

20.- Calcular A^{100} y, en general, A^k, con $k \in \mathbb{N}$, para la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

21.- Calcular A^k con $k \in \mathbb{N}$ impar para la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

22.- Calcular $A^n \ \forall n \in \mathbb{N}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

23.- Determinar para qué valores de los parámetros $b, c \in \mathbb{R}$ las siguientes matrices son diagonalizables. En los casos que lo sea, encontrar una matriz diagonal semejante a la dada.

$A_1=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & c \end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A_3=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

24.- Para cada una de las siguientes matrices A_i, i=1,2,3, encontrar si es posible una matriz regular P y una matriz diagonal D de forma que $D=P^{-1}A_iP$.

$A_1=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_3=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

FORMAS CUADRÁTICAS

1.- Dada la forma cuadrática $Q(x,\,y,\,z) = 2x^2 - y^2 + 2xz$, encontrar la expresión matricial que se obtiene al realizar el cambio de variables $x = 2x' - y' - z'$, $y = -y' + z'$, $z = 2x' + y'$.

2.- Considerar la forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ de matriz asociada

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Expresar $Q(\mathbf{x})$ en forma polinómica.

b) Encontrar, por el método de valores propios, una expresión diagonal para $Q(\mathbf{x})$.

c) Clasificar $Q(\mathbf{x})$.

3.- Considerar la forma cuadrática Q($\mathbf{x}$) de matriz asociada

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Expresar $Q(\mathbf{x})$ en forma polinómica.

b) Encontrar, por formación de cuadrados, una expresión diagonal para $Q(\mathbf{x})$.

c) Clasificar $Q(\mathbf{x})$.

4.- Para la forma cuadrática $Q(x,\,y,\,z) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$ se pide:

a) Encontrar una expresión diagonal para Q.

b) Clasificar Q.

5.- Para cada una de las siguientes matrices, se pide:

a) Encontrar una matriz diagonal congruente con la matriz dada.

b) Clasificar la forma cuadrática que representa.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6.- Clasificar según su signo las siguientes formas cuadráticas:

a) $Q(x, y) = 3x^2 - 4xy + 7y^2$.

b) $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$.

c) $Q(x, y) = 6xy - 2x^2 - 5y^2$.

d) $Q(x, y) = 4y^2 + 8xy$.

e) $Q(x, y) = 4xy$.

f) $Q(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$.

g) $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xz + 2xy + 2yz$.

h) $Q(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy$.

i) $Q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$.

j) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

k) $Q(x, y, z) = -4x^2 + y^2 + 3z^2 + 3xz + yz$.

l) $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2xz + 3y^2 + 2z^2$.

m) $Q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 3z^2 - 3xy + 4yz - 2xz$.

n) $Q(x, y, z) = x^2 + 10y^2 + 6xy$.

o) $Q(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz$.

p) $Q(x, y, z, t) = 2xz - 3yt + 2xt - t^2$.

q) $Q(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2z^2 + 2xy + 4yz$.

r) $Q(x, y, z) = 2xy + 4yz - 4xz - x^2 - y^2 + 4z^2$.

7.- Demostrar que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.

8.- Determinar para que valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ las siguientes formas cuadráticas son semidefinidas indicando si es positiva o negativa.

a) $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + \alpha z^2 - 2xz$.

b) $Q(x, y, z) = x^2 + \alpha y^2 + \alpha z^2 + 2yz$.

9.- Expresar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = (3-\beta)x^2 - y^2 - 4z^2 + 2xy + 10xz + 2yz$ como una suma de cuadrados y clasificarla según los valores de $\beta \in \mathbb{R}$.

10.- Clasificar según los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ la forma cuadrática de expresión $Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\beta yt + 2\beta xz$.

11.- Estudiar, según los valores del parámetro a, el signo de la forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

12.- Considerar la forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es definida negativa para algún valor del parámetro a?.

13.- Clasificar las siguientes formas cuadráticas restringidas:

a) $Q(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}xy$ sobre $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - \sqrt{2}y = 0\}$.

b) $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz + 4yz$ para los vectores $x + 2y - z = 0$, $2x - 3y + z = 0$.

c) $Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4xy + 2yz$ para los vectores $x - y + z = 0$.

d) $Q(x, y, z, t) = x^2 - z^2 + 2xz + xt + 2yz$ para los vectores $x + y - z = 0$, $y - t = 0$.

14.- Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ restringida a:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$.

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -z\}$.

15.- Clasificar $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ restringida a:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0\}$.

b) $S = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

16.- Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ sobre el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\}$.

17.- Considerar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = 4x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xz$. Se pide:

a) Encontrar una expresión diagonal para Q.

b) Clasificar Q según su signo.

c) Clasificar Q restringida a $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$.

18.- Considerar la forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde b es un parámetro real. Se pide:

a) Determinar su signo según los valores del parámetro b.

b) Determinar su signo restringida a los vectores de la forma $y = 2z$ para cualquier valor de b.

19.- Sea $Q(x, y, z) = y^2 - xy - xz - yz$. Se pide:

a) Encontrar una expresión diagonal para Q.

b) Clasificar Q.

c) Clasificar según los valores del parámetro α Q restringida al subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = \alpha z\}$.

20.- Sea $Q(x, y, z) = 2ax^2 + y^2 + z^2 + 4axz$, con $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

a) Clasificar Q según los valores del parámetro a.

b) Para a = -1, encontrar subconjuntos S_1 y S_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que Q restringida a S_1 sea definida positiva y Q restringida a S_2 sea definida negativa.

21.- Sea $A \in M_n$ simétrica y $Q(\mathbf{x}) = X^t A X$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la forma cuadrática asociada. Se pide:

a) Probar que $Q(\mathbf{x})$ y $Q(\lambda \mathbf{x})$ tienen el mismo signo $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \neq 0$.

b) ¿Para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que $Q(\mathbf{x}) = Q(\lambda \mathbf{x})$?.

c) Concluir utilizando a) y b) que $Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{y})$ en general, no es cierto.

d) Si $A' \in M_n$ es una matriz simétrica y $Q'(\mathbf{x}) = X^t A' X$ es la forma cuadrática asociada, ¿cuál es la matriz asociada a la forma cuadrática $(Q + Q')(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) + Q'(\mathbf{x})$?.

22.- Sea $A \in M_n$ una matriz simétrica tal que su forma cuadrática asociada es definida positiva. Si $B \in M_n$, probar que:

a) Si *B* es regular entonces la forma cuadrática de matriz asociada $B^t AB$ es definida positiva.

b) Si B es no regular entonces la forma cuadrática de matriz asociada $B^t AB$ es semidefinida positiva.

23.- Sea $A \in M_n$ simétrica y $Q(\mathbf{x}) = X^t AX$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la forma cuadrática asociada. Probar que si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes entonces $Q(\mathbf{x})Q(\mathbf{y}) \geq 0$.

24.- Sean $A, B \in M_n$ matrices simétricas. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si las formas cuadráticas de matrices asociadas *A* y *B*, son definidas positivas entonces la forma cuadrática de matriz asociada *A*+*B* es definida positiva.

b) Si la forma cuadrática de matriz asociada *A* es definida positiva y la forma cuadrática de matriz asociada *B* es definida negativa, entonces la forma cuadrática de matriz asociada *A*+*B* es indefinida.

c) Si la forma cuadrática de matriz asociada *A* es definida positiva y la forma cuadrática de matriz asociada *B* es definida negativa, entonces la forma cuadrática de matriz asociada *A*+*B* es semidefinida positiva o semidefinida negativa.

d) Si las formas cuadráticas de matrices asociadas *A* y *B*, son semidefinidas positivas entonces la forma cuadrática de matriz asociada *A*+*B* es semidefinida positiva.

e) Si las formas cuadráticas de matrices asociadas *A* y *B*, son definidas negativas, entonces la forma cuadrática de matriz asociada *A*-*B* es definida negativa.

f) Si la forma cuadrática de matriz asociada *A* es definida positiva entonces la matriz *A* es regular.

25.- Ante lo elevado del déficit público de un pais imaginario, el gobierno decide crear un nuevo impuesto *T* cuyo importe es función de los pagos (o devoluciones en su caso) por el impuesto de las personas físicas, *R*, y de los pagos por el impuesto del patrimonio, *P*, de tal manera que $T = 2R^2 + 4P^2 - 4RP$. El gobierno antes de ponerlo en marcha quiere asegurarse de que la recaudación por dicho impuesto será mayor que cero para cada individuo, es decir, no está dispuesto a devolver dinero a ningún contribuyente por este concepto.

Comprobar que el impuesto cumplirá su finalidad recaudadora con todos y cada uno de los contribuyentes.

26.- Los economistas de una empresa aseguran que la función de producción es del tipo: $P = L^2 + K^2 - 2LK$, siendo L y K el número de trabajadores y de máquinas respectivamente. Además se sabe que para que funcione cada máquina se necesitan dos trabajadores. Comprobar que efectivamente, P es una función de producción.