1.- Para cada una de las siguientes situaciones, escribir un programa matemático que permita obtener su solución.

a) Una empresa produce tres bienes cuyos precios de mercado son: $p_1 = 16, p_2 = 12$ y $p_3 = 20$. Su función de costes es $C(q_1, q_2, q_3) = q_1^2 + 2q_2^2 + 3q_3^2 - 2q_1q_2 + 25$ donde q_1, q_2, q_3 representan las cantidades producidas de cada uno de los tres bienes. Obténgase las cantidades a producir de cada bien para maximizar el beneficio de la empresa.

b) El volumen de ventas V de un coche es función del número de anuncios en prensa, x, y del número de minutos de propaganda en TV, y. Estadísticamente se ha estimado que la relación entre las tres variables es $V = 12xy - x^2 - 3y^2$. Si un anuncio en la prensa vale 100 euros, un minuto en TV cuesta 1700 euros y el presupuesto en publicidad de la empresa es de 30000 euros, determinar la política óptima en publicidad.

c) Un sastre dispone de 160 metros cuadrados de tela de algodón y 240 metros cuadrados de tela de lana para hacer vestidos y abrigos. Para cada vestido se utilizan 1 metro cuadrado de tela de algodón y 3 metros cuadrados de tela de lana y para cada abrigo 2 metros cuadrados de tela de algodón y la misma cantidad de tela de lana. Suponiendo que se vende todo lo que se produce, calcular cuántos vestidos y abrigos debe hacer el sastre para obtener un ingreso máximo sabiendo que cada vestido se vende por 150 euros y cada abrigo por 210 euros.

d) En un hospital se quiere elaborar una dieta alimenticia para un determinado grupo de enfermos con dos alimentos A y B. Estos alimentos contienen tres principios nutritivos: N1, N2 y N3. Una unidad de A vale 1 euro y contiene 2 unidades de N1, 1 de N2 y 1 de N3. Una unidad de B vale 2,5 euros y contiene 1, 3 y 2 unidades de N1, N2 y N3 respectivamente. Un enfermo de este grupo necesita diariamente al menos 4, 6 y 5 unidades de N1, N2 y N3 respectivamente. Determinar las cantidades de alimentos A y B que dan lugar a la dieta de coste mínimo .

2.- Calcular para cada una de las siguientes funciones, los máximos y mínimos locales y globales en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = x(x-1)$ en el intervalo [0,1]

b) $f(x) = -x(x-1)$ en el intervalo [0,2]

c) $f(x) = lnx$ en el intervalo [1,e]

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en el intervalo [-2,-1]

e) $f(x) = senx + cosx$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

3.- Clasificar cada uno de los siguientes programas matemáticos y resolverlos gráficamente:

a) Optimizar $x^2 + y^2 + 8$

b) Optimizar $\sqrt[3]{x^2 + y^2 + 8}$

c) Optimizar $\sqrt[3]{x^2 + y^2 + 8}$

s.a: $y \geq x^2 - 2$

d) Optimizar $\sqrt[3]{x^2 + y^2 + 8}$

s.a: $\begin{cases} y \geq x^2 - 2 \\ y \leq 0 \end{cases}$

e) Optimizar $x + y$

s.a: $\begin{cases} y \geq x^2 \\ 2x + y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

f) Maximizar $x_1 + x_2$

s.a: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq -5 \end{cases}$

g) La función de utilidad de un consumidor viene dada por $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$, donde x_1 y x_2 representan las cantidades de los bienes 1 y 2 consumidas. Sabiendo que p_1 y p_2 son los precios unitarios de los bienes 1 y 2 y que el consumidor dispone de una renta R que debe consumir en su totalidad, calcular la cantidad a consumir de cada bien si el objetivo es maximizar la utilidad.

4.- Representar gráficamente los siguientes conjuntos e indicar si son o no convexos. En el caso de que sean convexos determinar sus vértices.

a) $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$

b) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x,\ x + y \geq 1\right\}$

c) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \leq x^2\right\}$

d) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y > x^2\right\}$

e) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\right\}$

5.- Estudiar la concavidad y la convexidad de las siguientes funciones en su dominio de definición. Razonar si existen puntos de inflexión y en su caso calcularlos.

a) $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

6.- Indicar si las siguientes funciones son cóncavas o convexas en los conjuntos que se indican:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 10 + e^{x+y}$, en $\mathbb{R}^2$

b) $f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz$, en $\mathbb{R}^3$

c) $f(x, y) = ln(xy)$, en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$

d) $q(K, L) = A\, K^{\alpha} L^{\beta}$, con A, α, β > 0, $\alpha+\beta$ < 1, en $D = \{(K, L) \in \mathbb{R}^2 \mid K > 0, L > 0\}$

7.- Un consumidor dispone de una renta de 150 euros que gasta íntegramente en el consumo de dos bienes: yogures, cuyas cantidades denotamos por x_1 y refrescos, cuyas cantidades denotamos por x_2. Sabiendo que el precio de cada yogur es de 1,5 euros y el de cada refresco es de 2 euros, se pide:

a) Determinar si el conjunto formado por todas las combinaciones de consumo que el consumidor puede comprar es convexo o no. En caso de serlo, ¿cuáles son sus vértices?

b) Supongamos ahora que existe una oferta de promoción de modo que, por la compra de 10 o más yogures, el precio unitario de cada yogur es de 1 euro. ¿Es convexo el conjunto de combinaciones alcanzables?

8.- Consideremos un individuo cuya riqueza viene dada exclusivamente por los ingresos derivados de su trabajo, la cual distribuye entre dos bienes: trigo y horas de ocio. Sabiendo que puede trabajar un máximo de 24 horas al día, se pide:

a) Representar gráficamente el conjunto de combinaciones de consumo alcanzables si el salario por hora es w = 1 y el precio unitario del trigo es p = 1. (Represente las horas de ocio x_1 en el eje de abscisas y las unidades de trigo x_2 en ordenadas). ¿Es convexo el conjunto alcanzable?

b) Supongamos ahora que el salario sigue siendo w = 1 para las 8 primeras horas trabajadas, mientras que es w' = 1,5 para las restantes, las cuales se consideran horas extraordinarias. ¿Qué representación gráfica tiene ahora el conjunto alcanzable? ¿Es convexo?

9.- Un consumidor posee una renta diaria de 40 unidades monetarias para el consumo de dos bienes: tabaco (cuyas cantidades denotamos por x_1) y alimentos (cuyas cantidades denotamos por x_2). El precio unitario del tabaco es p_1 = 8 y el precio unitario de los alimentos es p_2 = 2.

a) Dibuje el conjunto de combinaciones de consumo que son alcanzables por parte del consumidor y deducir si es convexo o no.

b) Supongamos que el gobierno establece un impuesto de cuantía de $t = 1$ que grava el consumo a partir de la segunda unidad de tabaco. ¿Es convexo el conjunto alcanzable?

10.- El señor X es coleccionista de sellos y monedas, de manera que su nivel de satisfacción depende del número que tenga de ambos bienes. Concretamente, su utilidad está representada por la función: $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, donde $x_1 > 0$ denota el número de sellos y $x_2 > 0$ la cantidad de monedas y $0 < \alpha < 1$. Se pide:

a) Deducir si la función de utilidad del señor X es cóncava o convexa.

b) Supongamos el valor $\alpha = \frac{1}{2}$ y sea la curva de nivel k. Represente gráficamente el conjunto de combinaciones de sellos y monedas que proporcionan al señor X un nivel de satisfacción mayor que k. ¿Es dicho conjunto convexo? ¿Cómo se interpreta la convexidad de dicho conjunto en términos de satisfacción?

11.- En la producción de automóviles, una empresa emplea como factores productivos el trabajo (L) y el capital (K). La función de producción viene representada de la forma: $Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$, donde Q indica el número de automóviles producidos, A es una constante positiva y α, $\beta > 0$.

a) Deduzca qué relación debe darse entre los parámetros α y β para que la función de producción sea cóncava.

b) Sean $A = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$. Deduzca el conjunto de combinaciones de trabajo y capital que permiten producir más de 50 automóviles y demuestre que es convexo. ¿Cómo interpreta la convexidad en términos de producción?

1.- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 34$. Razonar la existencia de extremos relativos y en su caso calcularlos.

2.- Dada la función $f(x,y) = x\, Ln y$.

a) Determinar, si existen, los puntos críticos de *f*.

b) Determinar, si existen, los extremos locales de *f*.

3.- Determinar si los puntos (0,0), (1,-1), $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ son óptimos locales de la función $f(x,y) = x^3 + y^2 - x\,y$ en su dominio de definición.

4.- Dada $f(x,y) = x\,y^2$, estudiar si *f* puede alcanzar el valor máximo en los puntos (0, 2) y (2, 0).

5.- Dada $f(x,y) = x^2 - 8y$, estudiar la existencia de óptimos en su dominio.

6.- Determinar los óptimos locales de las siguientes funciones en su dominio de definición:

a) $f(x) = \dfrac{x^4}{x-1}$

b) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$

d) $f(x,y) = x\,y^2$

e) $f(x,y) = x^2 - y^2$

f) $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{8}(-4x^3 + 2x^2 - 2x - 1)$

g) $f(x,y) = (x - y)^4$

h) $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$

i) $f(x,y) = x^4 + 8x^2 + y^2 - 4y$

j) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$

k) $f(x,y) = xy$

l) $f(x,y) = (x - y + 1)^2$

ll) $f(x,y) = x^2y - y^2$

m) $f(x) = \dfrac{lnx}{x}$

n) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

ñ) $f(x,y) = x\,y\,e^{x+2y}$

o) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

p) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xy + 10 + e^{x+y}$

q) $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$

r) $f(x,y) = -x^2 - 5y^2 + 4y + 1$

s) $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x}$

t) $f(x,y) = (x - y)^4 + (y - 1)^2$

u) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

v) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

w) $f(x,y) = x^2 y^2$

x) $f(x,y,z) = 3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 2yz + 6xz - 2xy$

y) $f(x,y,z) = x\,y\,z$

z) $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 16yz$

7.- ¿Qué se ha de verificar para que la función $f(x) = (x-a)^4(x+b)$ alcance un mínimo en $x = a$?

8.- Hállense los valores de *a* y *b* para que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx$ alcance un máximo en el punto (3,9).

9.- Dada la función $f(x) = e^{bx^2}$, $b \in \mathbb{R}$, hallar los extremos relativos de la función en su dominio de definición señalando si son máximos o mínimos según los valores del parámetro *b*.

10.- Calcular los óptimos locales de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$ según los valores del parámetro real *a*.

11.- Determinar, si existen, los óptimos locales de $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3$.

12.- Calcular, si existen, los óptimos locales de la función $f(x,y) = y\,e^x - e^y$ en su dominio de definición.

13.- Dada $f(x) = 1 - xe^x$. Se pide:

a) Calcular los extremos relativos de *f*(*x*) en su dominio.

b) Calcular los extremos absolutos de *f*(*x*) en [-1,1].

c) Calcular $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

d) Calcular los extremos absolutos de *f*(*x*) en su dominio.

14.- Sea la función $f(x) = ln(1 + x^2)$:

a) Determinar su dominio de definición.

b) Estudiar la existencia de óptimos locales de la función en su dominio de definición y en su caso calcularlos.

c) Estudiar la existencia de óptimos globales de la función en el intervalo [-1, 1] y en su caso calcularlos.

15.- Sea la función $f(x,y) = ax^2 + by^2 - 4x + 2y + c$. Hallar el valor de los parámetros reales *a*, *b* y *c* para que el valor mínimo de esta función sea 10 y se alcance en el punto (2,-1).

16.- Sea $f(x,y) = x^3 - y^2 + 3xy$.

a) Determinar los óptimos locales de *f* en su dominio de definición.

b) Analizar si es convexo el programa: Maximizar $f(x,y)$ en $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x < -1\right\}$.

17.- Dada la función $f(x,y) = 9x^2 + y^2 + 6xy + 1$:

a) Determinar, si existen, los extremos locales de $f(x,y)$.

b) Los extremos calculados en el apartado a), ¿son globales?. Razonar la respuesta.

18.- Dada la función $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$:

a) Determinar, si existen, los óptimos locales de $f(x,y)$.

b) ¿Existen óptimos globales de $f(x,y)$?. Razonar la respuesta.

19.- Dada la función $f(x,y,z) = -x^2 - 5x - y^2 + 2yz + 6y - 4z^2 - 4z - 14$:

a) Determinar, si existen, los extremos locales de $f(x, y, z)$.

b) ¿Existe máximo global y mínimo global de $f(x, y, z)$?. Razonar la respuesta.

20.- Dada la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

a) Estudiar la existencia de óptimos locales de $f(x, y)$ en su dominio de definición.

b) Analizar la existencia de óptimos globales de $f(x,y)$ en el conjunto $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x > 0,\ y > 0\right\}$.

21.- Sea $f(x,y) = x^4 + x^2 + y^2 + xy + x + 2y$.

a) Determinar los óptimos locales de *f* en su dominio de definición.

b) ¿Son globales los óptimos del apartado a)?

22.- Sabiendo que la oferta de un bien en función de su precio *p* es:

$$S(p) = \begin{cases} \dfrac{p^2}{20} & \text{si } 0 \le p < 10 \\ 2p - 15 & \text{si } 10 \le p \le 30 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de la función de oferta.

b) ¿Cuál es la oferta si el precio es de 5 unidades monetarias?

c) A la vista de la representación gráfica de la función, ¿cuál es la máxima y la mínima oferta?. ¿Para qué precios se producen?

23.- El coste total de producir q unidades de un bien es $C(q) = q^2 - 3\sqrt{q+1} + 4$ y cada unidad se vende a 47'7 unidades monetarias. Compruebe que el beneficio máximo se obtiene para una producción de 24 unidades.

24.- Un librero puede obtener un cierto libro del editor a un coste de 3 euros. Si el precio de venta es de 15 euros, tiene una demanda de 200 libros y, por cada reducción de 0'5 euros en el precio de venta, la demanda aumentará en 10 libros. ¿A qué precio debe de vender los libros para elevar al máximo su beneficio?

25.- Dadas las funciones de ingreso y coste total de una empresa:

$$I(x) = -\frac{11}{4}x^2 + \frac{235}{108}x + 500 \qquad 2 \le x \le 5$$

$$C(x) = \frac{3}{4}x + 1 \qquad 2 \le x \le 5$$

siendo x la producción de la empresa en miles de unidades, determínese la producción para obtener el máximo beneficio.

26.- Un agricultor utiliza trabajo y fertilizantes como únicos factores para cultivar un campo, siendo x e y los costes de estos factores, respectivamente. Si el beneficio por unidad de superficie viene dado por la función $B(x,y) = 20x + 26y + 4xy - 4x^2 - 3y^2$, encontrar los valores de x e y que maximizan el beneficio.

27.- Una compañía fabrica un producto en dos factorías. El coste de producción de x unidades en la primera factoría es $c_1 = \frac{1}{5}x^2 + 40x + 5000$ y el coste de producción de y unidades en la segunda factoría es $c_2 = \frac{1}{4}y^2 + 20y + 1375$. Si el producto se vende a 150 euros la unidad, hallar la cantidad que debe producirse en cada factoría para maximizar el beneficio.

28.- Una empresa produce dos bienes con una función de coste $C(q_1,q_2) = \frac{3}{2}q_1^2 + 3q_1q_2 + 2q_2^2 + 34$. Sabiendo que puede vender estos bienes al mercado a unos precios $p_1 = 42$ y $p_2 = 51$, calcular los niveles de producción que proporcionan a la empresa el máximo beneficio.

29.- La función de coste total de un monopolista que produce dos bienes viene dada por $C(q_1,q_2) = \frac{1}{6}q_1^2 - 10q_2 + 90$, donde q_1 y q_2 representan las cantidades producidas de dichos bienes. Supongamos que las demandas a las que se enfrenta la empresa son $q_1 = 680 - 5p_1 - 3p_2$ y $q_2 = 430 - 3p_1 - 2p_2$ donde p_1 y p_2 son los precios de cada uno de los bienes. Calcular los niveles de producción que proporcionan al empresario el máximo beneficio.

30.- Determinar el nivel de producción de un bien q y el nivel de empleo de factores x_1, x_2 con los que una empresa maximiza sus beneficios siendo $q(x_1, x_2) = lnx_1 + lnx_2$ la función de producción, $C(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 + 5$ la función de costes y p = 15 el precio unitario de venta del producto.

1.- Sea $f(x,y) = e^x + e^y$, se pide:

a) ¿Existe algún punto óptimo de *f*?.

b) Si se considera la función *f* sujeta a la restricción $x + y = 2$, ¿existe algún punto óptimo?.

2.- Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$:

a) ¿Existe algún punto óptimo de *f*?.

b) Escribir una restricción de forma que los puntos obtenidos en a) no sean solución del problema restringido.

c) Si se considera la función *f* sujeta a la restricción $x + y = 1$, ¿existe algún punto óptimo?.

3.- Sea la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + bxy + az$, siendo *a* y *b* parámetros reales.

a) Estudiar para que valores de los parámetros *a* y *b*, el punto (1, 1, 1) es máximo, mínimo o no es extremo.

b) Obtener una relación entre los parámetros *a* y *b* que sea una condición necesaria para que el punto (1, 1, 1) sea un óptimo local de *f* sujeta a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

4.- Comprobar que el punto (1, 0, 0) es solución del problema:

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimizar} & f(x,y,z) = x + y + x^2 + y^2 + z^2 \\ s.a: & \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 1 \end{array} \end{array}$$

Comprobar que el punto (1, 0, 0) no verifica las condiciones necesarias de primer orden de Lagrange. ¿Cuál es la razón de esta aparente contradicción?.

5.- Dado el programa

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & f(x,y) = x^2 \\ s.a: & x^4 + 2x^2y^2 + y^2 = 4x^2 \end{array}$$

a) Escribir las condiciones de Lagrange del problema.

b) ¿Debe el punto $(0,0)$ satisfacer las condiciones de Lagrange para ser óptimo?

c) Calcular los candidatos a puntos óptimos.

d) Sabiendo que el conjunto factible es compacto (cerrado y acotado) determina los máximos y mínimos globales.

6.- Calcular los extremos locales de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $y + x^2 = 1$.

7.- Calcular los extremos locales de la función $f(x,y,z) = x + y + z$ sobre el elipsoide $x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 1$.

8.- Calcular los extremos locales de la función $f(x,y,z) = x\,y\,z$ sujeta a la restricción $x + y + z = 1$.

9.- Calcular los extremos locales de la función $f(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ sujeta a las restricciones: $2x + 3y = 6$, $4y - z = 1$, $y + z + t = 15$.

10.- Determinar los óptimos locales de las siguientes funciones sujetas a las restricciones que se indican:

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2$

s.a: $x + y + z^2 = 4$

b) $f(x,y,z) = 2x + y - z$

s.a: $x^2 + y^2 - z = 0$

c) $f(x,y,z) = x^2 - y + 2z$

s.a: $x^2 + y^2 + 4z^2 = 8$

d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

s.a: $\begin{cases} x + y + z = 14 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

e) $f(x,y,z) = -x^2 + 2y + z$

s.a: $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$

f) $f(x,y) = x + y$

s.a: $x^2 + y^2 = 1$

g) $f(x,y) = 2x^2 + 4y^2 + 2x$

s.a: $x^2 + y^2 = 1$

h) $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2$

s.a: $x^2 + y^2 = 8$

i) $f(x,y) = x\,y$

s.a: $x^2 + y^2 = 1$

j) $f(x,y) = x^2 + y^2$

s.a: $ln(x\,y) = 1$

11.- Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia de radio *r*.

12.- Dado el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & 3x + 4y \\ s.a: & x^2 + y^2 = 25 \end{array}$$

a) Determinar, si existen, los puntos críticos de la Lagrangiana del problema.

b) Clasificar los puntos críticos obtenidos en el apartado a).

c) ¿Podemos afirmar que los extremos obtenidos en el apartado b) son globales?

13.- Resolver el siguiente problema de optimización utilizando la técnica de los multiplicadores de Lagrange

$$\begin{array}{rl} \textit{Optimizar} & x+y \\ s.a: & xy-1=0 \end{array}$$

14.- Sea $f(x,y,z)=x+2y+2z$:

a) Calcular, si existen, los óptimos locales de *f* en $S=\left\{(x,y,z)\in R^3 \,\middle|\, x+4z^2=5\right\}$.

b) Calcular, si existen, los óptimos locales de *f* en $T=\left\{(x,y,z)\in R^3 \,\middle|\, x^2+y^2+4z^2=6\right\}$.

15.- Sea $f(x,y)=\dfrac{y-x}{y}$. Estudiar la existencia de máximos y mínimos relativos condicionados a la restricción $x-y^2=1$.

16.- Dado el problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \textit{Optimizar} & f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \\ s.a: & \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x-y+2z=1 \end{array} \end{array}$$

a) Determinar, si existen, los óptimos locales.

b) Analizar si se trata de óptimos globales. Razonar la respuesta.

17.- Para el problema

$$\begin{array}{rl} \textit{Optimizar} & x+y-2z \\ s.a: & x^2+y^2+z^2=6 \end{array}$$

a) Calcular los puntos críticos y clasificarlos.

b) ¿Qué se puede decir acerca de la globalidad de los extremos?

18.- Sea el problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \textit{Optimizar} & x^2y^2 \\ s.a: & xy+y=1 \end{array}$$

a) Determinar los puntos críticos de la función Lagrangiana del problema.

b) Clasificar los puntos obtenidos en el apartado anterior.

19.- Dado el problema

$$\begin{array}{rl} \textit{Optimizar} & x^2-y^2 \\ s.a: & x^2+y^2=1 \end{array}$$

a) El conjunto factible ¿es convexo?, ¿es cerrado?, ¿es acotado? Justificarlo.

b) Hallar los puntos críticos de la función Lagrangiana asociada y clasificarlos.

c) Sin necesidad de volver a resolver el problema, y si el término independiente de la restricción es 1´1 en lugar de 1, contestar razonadamente a la pregunta: ¿los valores óptimos mejoran o empeoran?

20.- Determinar, usando la técnica de los multiplicadores de Lagrange, los extremos relativos condicionados del siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & y^2 + x^2y - y + 10 \\ s.a: & y - x^2 = 0 \end{array}$$

21.- Dado el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy - a\,x - 2b\,y - 5x \quad (a,b \in R) \\ s.a: & x = y \end{array}$$

a) Determinar las condiciones que deben cumplir los parámetros a y b para que el punto $(1,1)$ sea un punto crítico del programa.

b) Para $b = 1$, analizar el carácter del punto $(1,1)$.

22.- Dado el problema

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & f(x,y,z) = x^2 + y^2 \\ s.a: & 4x - 3y + 2z = 6 \end{array}$$

analizar la existencia de óptimos globales y calcularlos en su caso.

23.- Dado el programa

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & x^2 + y^2 \\ s.a: & y + x^2 = 1 \end{array}$$

a) Resolverlo por el método de Lagrange.

b) Sin resolver el programa $\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & x^2 + y^2 \\ s.a: & y + x^2 = 0{,}9 \end{array}$, analizar si los óptimos de este nuevo programa mejoran o empeoran respecto del programa del apartado anterior.

24.- Dado el programa

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & xy + z^2 \\ s.a: & 2x - y + z = 0 \end{array}$$

a) Calcular, si existen, los óptimos locales con el método de Lagrange.

b) Calcular, si existen, los óptimos globales.

25.- Dado el problema:

$$\begin{array}{ll} Optimizar & x-3y \\ s.a: & x-y^3=0 \end{array}$$

a) Utilizando el método de Lagrange calcular los candidatos a extremos locales.

b) Clasificar los puntos obtenidos en el apartado anterior.

26.- Dada la función $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$,

a) Calcular sus extremos relativos condicionados sobre el conjunto $\left\{(x,y)\in R^2 \middle| y=x^2-1\right\}$.

b) ¿El punto $(0,-1)$ es máximo global del problema anterior? (Puede ayudar la representación gráfica del problema).

27.- Dado el programa

$$\begin{array}{ll} Optimizar & x\ln(y) \\ s.a: & y-yx=1 \end{array}$$

a) Calcular el valor de λ para que $(0,1,\lambda)$ sea punto crítico de la función Lagrangiana del problema.

b) Determinar si el punto $(0,1)$ es un extremo local del problema anterior.

28.- Considerando el problema

$$\begin{array}{ll} Optimizar & 10x^2-16xy+10y^2 \\ s.a: & x^2+y^2=2 \end{array}$$

a) Calcular sus puntos críticos.

b) Utilizando condiciones de segundo orden clasificar los puntos del apartado a).

c) Razonar sobre la globalidad de los puntos obtenidos en el apartado a).

29.- La función de utilidad de un consumidor es $U(x,y)=(x+2)(y+1)$ donde x e y representan las cantidades de los bienes 1 y 2 consumidos en un periodo de tiempo dado. Sea 4 u.m. el precio unitario del bien 1, 6 u.m. el precio unitario del bien 2 y 130 u.m. el presupuesto de que dispone el consumidor que se gasta totalmente. Se pide:

a) Calcular la cantidad a consumir de cada bien si el objetivo es maximizar la utilidad.

b) ¿Cuál es la variación que experimenta la utilidad máxima ante un cambio en la cantidad de presupuesto disponible?

30.- La función de producción de una empresa es $f(x,y,z) = xy + xz + yz$, siendo x, y, z la cantidad, en miles de unidades, de los tres inputs que utiliza.

a) Hallar la cantidad de cada input que maximiza la producción, sabiendo que deben consumirse 6000 unidades entre los tres.

b) ¿Qué variación experimentará la producción máxima si se debe consumir 6100 unidades entre los tres inputs?

31.- Una empresa produce y comercializa dos bienes, *X* e *Y*. El beneficio de la venta de dichos bienes está expresado por la función $B(x,y) = ln(x-2)^2 + ln(y-1)^3$ siendo x e y el número de unidades vendidas del bien *X* e *Y*, respectivamente. Se sabe que se dispone de 240 unidades de materia prima para producir ambos factores; cada unidad de bien *X* precisa 10 unidades de dicha materia prima para su fabricación y cada unidad de bien *Y* 20 unidades. La materia prima ha de agotarse en su totalidad en el proceso de fabricación. Se pide:

a) Escribir un programa matemático con el que se pueda calcular el número de unidades del bien *X* y del *Y* que se han de fabricar para que el beneficio sea máximo, suponiendo que se vende todo lo que se produce.

b) Resolver el programa matemático planteado.

c) ¿Qué precio máximo estaría dispuesta a pagar la empresa por una unidad adicional de materia prima? Justificar la respuesta.

32.- La población productiva de una pequeña ciudad se divide en dos grupos, uno fabrica el bien *A* y el otro el bien *B*. Ambos bienes se exportan en su totalidad, percibiendo 12.5 u.m. por unidad del bien *A* y 100 u.m. por unidad del bien *B*. Las posibilidades de producción anual se hallan limitadas por la función de transformación $10x + 4y^2 = 10000$, siendo x el número de unidades producidas del bien *A* e y el número de unidades producidas del bien *B*. Se pide:

a) Calcular el número de unidades anuales de cada bien con las que se maximiza el ingreso conjunto de los productores de esta ciudad.

b) Sin volver a resolver el problema, razonar cómo variaría el ingreso máximo si se considerara la función de transformación $10x + 4y^2 = 10001$.

33.- Una empresa produce un bien a partir de dos factores productivos *X* e *Y* siendo su función de producción $q(x,y) = 40x + 60y - x^2 - 3y^2$, donde x representa la cantidad de factor *X* e y la de factor *Y*. Los precios unitarios de los factores productivos son 1 y 2 unidades monetarias, respectivamente. Se pide:

a) Sabiendo que los costes de los factores productivos han de ser de 26 u.m., calcular la cantidad de cada factor productivo que se ha de utilizar si se quiere maximizar la producción. Calcular también la producción máxima.

b) Sin volver a resolver el problema, ¿cuánto variará la producción máxima si el coste de los factores productivos ha de ser de 26´1 u.m.?

34.- Una empresa emplea dos factores A y B, en cantidades *x* e *y*, para obtener un determinado producto. La función de costes viene dada por $C(x,y)=5x^2-8xy+5y^2+10$. Fijado el nivel de producción en 8 unidades, la tecnología utilizada para alcanzar dicho nivel viene determinada por $Q(x,y)=x^2+y^2$.

a) ¿Qué combinación de factores minimizará el coste de la empresa para el nivel de producción fijado? ¿Cuál sería en este caso el coste de la empresa?

b) Si la empresa se planteara aumentar en una pequeña cantidad su nivel de producción, ¿disminuirían con ello los costes? Razonar la respuesta.

35.- Las preferencias de un consumidor que demanda cantidades de dos bienes están representadas por la función de utilidad: $u(x_1,x_2)=x_1^{1/2}x_2$, donde x_1 indica la cantidad del bien 1 y x_2 la cantidad del bien 2. Dicho consumidor dispone de una renta monetaria de *R* euros que gasta íntegramente en el consumo de los bienes. Sabiendo que los precios son p_1, p_2:

a) Determine las cantidades que demandará el consumidor de ambos bienes en función de los precios y de la renta, de manera que su utilidad sea máxima. ¿Qué combinación elegirá si los precios son $p_1=5$, $p_2=4$ y la renta es $R=150$?

b) ¿Cuánto variará la utilidad del consumidor si dispusiese de una renta igual a 151 euros?

c) Suponga ahora que las preferencias del consumidor vienen representadas por la función de utilidad: $u(x_1,x_2)=x_1^{1/2}+x_2$. Determine la nueva combinación de cantidades que elegirá cuando los precios y la renta son, respectivamente, $p_1=5$, $p_2=4$, $R=150$.