FUNCIONES DE $\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}^m$

Nota: se entenderá $\log x = \log_{10} x$ y $\ln x = \log_e x$

1.- Determinar y representar gráficamente el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 3}}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x + 1}}{x^2 + x + 1}$

f) $f(x) = e^{\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}}$

g) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2 + x}}$

h) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

i) $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

j) $f(x) = \ln(x + 2) + \ln(x - 2)$

k) $f(x, y) = 3x + y$

l) $f(x, y) = \dfrac{3x + y}{x^2 + 2y^2}$

m) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x - y}}$

n) $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2}$

o) $f(x, y) = \ln(2x - y + 1)$

p) $f(x, y) = x + \sqrt{y}$

q) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$

r) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

s) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

t) $f(x, y) = \ln(3x^2 + y^2 + 4)$

u) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

v) $f(x, y) = \left(\ln(x + y),\ \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right)$

2.- Representar gráficamente las curvas de nivel de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x + y$

b) $f(x, y) = (x + y)^2$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2$

d) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

e) $f(x, y) = \sqrt{xy}$

f) $f(x, y) = x^y, x > 0$

g) $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2}$

h) $f(x, y) = \ln(2x - y + 1)$

i) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x}$

3.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^3+3}-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{3+4^{\frac{1}{x}}}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2-6x}{3x^2-8}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1-\dfrac{2}{3x}\right)^x$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x+4}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$ i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^5}{e^{-x}}$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^x$ k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5x+1}{8x-1}\right)^{-x}$ l) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{3x^2y}{4x-y+1}$

m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2}{5x^2+y^2}$ n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \left(x^2+5xy-8,\ e^{x^2y},\ \ln(2x+y)\right)$

4.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x}{x-1} & \text{si } x\le 0 \\ x^3+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-3y^2}{7x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\ne(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

5.- Calcular la primera derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^5$ b) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ d) $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$

e) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ f) $f(x)=\sqrt{2x-1}$

g) $f(x)=\ln x+\sqrt{x^2+1}$ h) $f(x)=\dfrac{\pi}{x}+\ln 2$

i) $f(x)=\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x}$ j) $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

k) $f(x)=\ln x\ \log x-\ln a\ \log_a x$ l) $f(x)=\dfrac{3}{56(2x-1)^7}-\dfrac{1}{24(2x-1)^6}-\dfrac{1}{40(2x-1)^5}$

m) $f(x)=\sqrt[3]{2e^x-2^x+1}+\ln^5 x$ n) $f(x)=x^2\,10^{2x}$

o) $f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x)$

p) $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$

q) $f(x) = x^4(a - 2x^3)^2$

r) $f(x) = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$

s) $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

t) $f(x) = (2x+1)(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}$

u) $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$

v) $f(x) = \ln(senx)$

w) $f(x) = senx^4$

x) $f(x) = cos^4 x$

y) $f(x) = sen^2 x \ cosx^6$

6.- Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z) = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$

b) $f(x,y) = \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2} + x}$

c) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$

d) $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$

e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$

f) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

g) $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$

h) $f(x,y) = x^y$

i) $f(x,y,z) = z^{xy}$

j) $f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

k) $f(x,y) = x^2 sen^2 y$

l) $f(x,y) = \frac{e^{ax}(sen\, x + a\cos y)}{a^2+b^2}$

7.- Comprobar que $y = xe^{-x}$ verifica la ecuación $x\frac{dy}{dx} = (1-x)y$.

8.- Calcular y' en las siguientes expresiones:

a) $2x^2 + 5xy + y^2 = 19$

b) $x^2 + y^2 = 25$

c) $y = 1 + xe^y$

d) $\ln y + e^{-\frac{y}{x}} = 8$

e) $\ln y + \frac{x}{y} = 7$

f) $x^y = y^x$

9.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x=1$.

Hallar un valor aproximado de f(1'1).

10.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{senx}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(1-cosx)}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen3x^2}{3x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos\sqrt{x}}{\frac{1}{2}x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos(senx)}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$ i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+senx)}{senx}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x^3}$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{senx\, tgx}{1-cosx}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos4x}{5x^2}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{1-e^x}$ n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen^2x}{1-cos2x}$ o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4(x-\ln(1+x))}{x\ln(1+x)}$

p) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$ q) $\lim\limits_{x\to 0^+} (cosx)^{\frac{1}{x}}$ r) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$

s) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}\ln x$ t) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$ u) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x^6)}{x^2}$

v) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x^3)\, e^{-x}$

11.- Calcular $\nabla f(x,y)$ cuando $f(x,y)=x^2y+y^3$.

12.- Hallar la matriz jacobiana de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln^2 x$ b) $f(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2$

c) $f(x_1,x_2)=(x_1+x_2, x_1-x_2)$ d) $f(t)=(t,\ e^t,\ e^{-t})$

13.- Calcular $\dfrac{dz}{dt}$ en las funciones:

a) $z=3x+y$, con $x=t^2+1$; $y=e^t$.

b) $z=xy+yu+xu$, con $x=t$; $y=e^{-t}$; $u=\log(t)$.

c) $z=e^{xy}$, con $x=t\ cost$; $y=t\ sen\, t$.

14.- Calcular $\dfrac{dz}{du}(1)$ en la función $z=3x^2+2xy-y^2$, con $x=u^2+3u$; $y=2u^2-u$.

15.- Calcular $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{\partial u}{\partial s}$ en la función $u = z\, sen \frac{y}{x}$, con $x = 3r^2 + 2s$; $y = 4r - 2s^3$, $z = 2r^2 - 3s^2$.

16.- Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y evaluarlas en el punto (x, y) = (0, 1), en los siguientes casos:

a) $z = u + v$, con $u = x + e^y$; $v = \log(y) + e^{-x}$.

b) $z = \frac{sen\, u}{v}$, con $u = s - t$; $v = s + x$; $s = y^2 - x$; $t = e^y$.

17.- Demostrar que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$, si $z = ln(x^2 + xy + y^2)$.

18.- Demostrar que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, si $z = xy + x\,e^{y/x}$.

19.- Demostrar que se verifica

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + xy\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = xyz,$$

siendo $z = e^y F\left(y\, e^{x^2/2y^2}\right)$ y F una función real de variable real derivable.

20.- Sea $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$, siendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en cualquier punto de la recta real. Si $g'(5)$ = 3, calcular $\nabla f(1,2)$.

21.- Determinar la diferencial de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $y = \ln x$, en 2

b) $y = \frac{x^2}{e^x}$, en 0

c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, en $(1,1)$

d) $u = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z$, en $(1,1,1)$.

e) $z = \ln\frac{2x}{y^2}$, en $(1, e)$

j) $f(x, y) = x^2 e^{\frac{y}{x}}$, en (x, y) con $x \neq 0$

k) $z = (e^{x+y} + y,\ xy^2)$, en $(0,0)$

22.- Sea $f(x)=\sqrt[3]{x}$, utilizando el concepto de diferencial, estudiar la variación que experimenta la función al pasar de x=27 a x=26'9.

23.- Calcular la derivada direccional de las siguientes funciones en la dirección y en el punto indicados:

a) $f(x,y)=3-2x^2+y^3$, en la dirección de $v=\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ y en el punto P=(1,2)

b) $f(x,y)=x^2+y+1$, en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y en el punto (0,0)

c) $f(x,y)=\log(x^2+y^3)$, en la dirección de $v=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ y en el punto $P=(1,3)$

d) $f(x,y,z)=x\,sen(yz)$, en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ y en el punto (1,3,0)

e) $f(x,y,z)=x\,seny+y\cos z+z\,senx$, en la dirección $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y en el punto (0,0,0)

f) $f(x,y,z)=(x^2+yz^2,\ sen(x^2+y^2))$, en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y en el punto $(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi},1)$

24.- Sea $f(x,y)$ una función diferenciable en el punto (1,2). Sabiendo que $f_v(1,2)=5$ y $f_w(1,2)=6$ con $v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $w=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, calcular $\nabla f(1,2)$.

25.- Dado el campo vectorial $f(x,y)=(xy,\ x^2,\ y^2)$, se pide:

a) Estudiar su diferenciabilidad en el punto $(-1,2)$.

b) En el caso de ser diferenciable, calcular su diferencial en dicho punto.

c) Hallar $f_v\,'$ en el punto $(-1,2)$ siendo $v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

26.- Calcular y'' en $y=\ln(x+\sqrt{4+x^2})$.

27.- Dada $f(x,y)=x\,e^{2y-x}$, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

28.- Calcular la matriz hessiana de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$.

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 4\ln x - 10\ln y,\ x,y > 0$.

c) $f(x,y) = 9x^2 + y^2 + 6xy + 12x + 4y$.

d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

f) $f(x,y,z) = xyz$.

29.- Si F y G son funciones reales de una variable real con derivadas de segundo orden continuas, demostrar que la función $z = x\,F\left(\frac{y}{x}\right) + G\left(\frac{y}{x}\right)$, satisface la siguiente ecuación:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = 0 .$$

30.- Sabiendo que f y g son funciones reales de una variable real con derivadas de segundo orden y $z = f(x^2 + y^2) + g(x^2 + y^2)$, calcular:

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) - \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) - \frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{y^3}\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) .$$

31.- Comprobar que $z = \log(x^2 + y^2)$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

32.- Si f es una función real de variable real con derivada segunda, comprobar que la función $z = x\,f(x+y) + y\,f(x+y)$ satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

33.- Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real y $h(x,y) = f(y \cdot g(x))$. Suponiendo que existen *f*" y *g*" en todo $\mathbb{R}$, calcular $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y),\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y)$.

34.- Calcular el desarrollo de Taylor hasta el orden 2 de las siguientes funciones en un entorno del punto que se indica:

a) $f(x) = \ln(1+x),\quad x = 0$ b) $f(x) = e^x,\quad x = 0$

c) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}, \quad x=0$

d) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}, \quad x=0$

e) $f(x)=\sqrt{1+x}, \quad x=0$

f) $f(x)=senx, \quad x=0$

g) $f(x)=cosx, \quad x=0$

h) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{(x-1)^2}, \quad x=0$

i) $f(x)=\ln(x-2x^2), \; x=\dfrac{1}{3}$

j) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right), \quad x=0$

k) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \quad x=1$

l) $f(x)=\sqrt[3]{6+x}, \quad x=2$

m) $f(x)=(1+x)e^{-x}, \; x=0$

n) $f(x)=(1+e^x)^3, \quad x=\dfrac{1}{2}$

o) $f(x)=sen^2 2x, \; x=0$

p) $f(x)=\ln(2x)-\dfrac{1}{x-1}, \quad x=2$

q) $f(x)=e^x\ln(1-x), \; x=0$

r) $f(x)=\ln(9-x^2), \; x=0$

s) $f(x,y)=e^{2x-3y}, \; (x,y)=(0,0)$

t) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, \quad (x,y)=(1,1)$

u) $f(x,y,z)=x+yz+e^y, \; (x,y,z)=(1,0,1)$

35.- Dada la función $f(x,y)=\sqrt{x+y}\,\ln y$, se considera la ecuación $f(x,y)=2e$. Se pide:

a) Demostrar que la anterior ecuación define a y como función implícita de x en un entorno del punto $(0,e^2)$.

b) Calcular $y'(0)$.

36.- Dada la ecuación $e^z sen(x+y)+e^y sen(x+z)+e^x sen(y+z)=0$, se pide:

a) Comprobar que define a z como función implícita de x y de y en un entorno del punto $(\pi,0,\pi)$.

b) Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}(\pi,0)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(\pi,0)$.

37.- Probar que la ecuación $x^2y+xy^2=16$ define a y como función implícita de x en un entorno del punto (2,2). ¿Qué podemos decir del crecimiento de la función $y(x)$ en un entorno de $x=2$?

38.- Considerar la ecuación $3\alpha x^2 - \ln(yz) - \dfrac{3\alpha x}{yz} = 0$. ¿Para qué valores del parámetro α podemos asegurar que la ecuación anterior define implícitamente la función $x = x(y,z)$ en un entorno del punto (1,1,1)?

39.- Dada la ecuación $z\ sen\, x - y\ sen\, z = 0$, se pide:

a) Demostrar que define a z como función implícita de (x,y) en un entorno de $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Hallar el polinomio de Taylor de grado 1 en un entorno del punto $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ de la función definida en el apartado a).

40.- Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $h(x,y) = sen(x^2 + y) + x\,y + a^2\,y$.

a) ¿Para qué valores de a la ecuación $h(x,\ y) = 0$ define a y como función implícita de x, $y = \varphi(x)$, en un entorno del punto (0, 0)?

b) Calcular $\varphi'(0)$.

c) ¿Define la misma ecuación en un entorno del (0,0) a x como función implícita de y para algún valor de a?

d) Sea $F(x,\ t) = (e^{x+t} + x^2 - 1,\ e^{\varphi(x)} + t\cos x - 1)$, con $\varphi(x)$ la función implícita anterior. Probar que $JF(0,0)$ es una matriz regular.

41.- Dada la ecuación $e^{x^2 - y^2} + \alpha(x^2 + y^2) = 1 + \alpha$, se pide:

a) ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la ecuación $e^{x^2 - y^2} + \alpha(x^2 + y^2) = 1 + \alpha$ define una función implícita $y = y(x)$ en un entorno del punto $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

b) Para los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, hallados en el apartado anterior, calcular $\dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

42.- Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \alpha\,y\,z - y\ln\left(1 + z^2\right) + z\,cos(x + 2y) + 1,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$.

a) Probar que $f(x,\ y,\ z)\ =\ 0$ define a z como función implícita de x e y en un entorno de $(\pi,\ 0,\ 1)$ para cualquier valor de α.

b) Calcular α para que $\dfrac{\partial z}{\partial x}(\pi,0) = 0 = \dfrac{\partial z}{\partial y}(\pi,0)$.

43.- Dada la ecuación $xy^2 - yx^2 + z^2 cos(xz) = 1$:

a) Probar que define a $z(x,y)$ como función implícita en un entorno del punto $(0,\sqrt{2},1)$.

b) Hallar el plano tangente a $z(x,y)$ en el punto $(0,\sqrt{2})$.

c) Hallar la derivada direccional de $z(x,y)$ en $(0,\sqrt{2})$ respecto de la dirección $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

44.- Sea $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z, t) = x^3 z + y^3 t^2 - 1$:

a) Probar que la ecuación $F(x, y, z, t) = 0$ define a la variable t como función de las variables (x, y, z) en un entorno del punto (0, 1, 0, 1).

b) Si $t = \varphi(x, y, z)$ es la función del apartado anterior, calcular $\nabla\varphi(0,1,0)$.

45.- Estudiar si son homogéneas las siguientes funciones indicando el grado de homogeneidad:

a) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x}$

b) $f(x,y) = 3x^4 + 4x^2y^2 + 5y^4$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^3 + y^3}$

d) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$

e) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-1/3}$

f) $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 - 15x - 12y$

g) $f(x,y) = 90x^{1/3}y^{1/3}$

h) $f(x,y) = x^a y^b$

i) $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x^3y + x^2yz - 4xz^3}{x - 2y}\right)^5$

j) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2} ln \dfrac{y}{z}$

k) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^2 - y^2} + \sqrt{x + z}$

l) $f(x,y,z) = \sqrt[5]{\dfrac{x^6 + y^4x^2 + yz^5}{2z^3}}$

m) $f(x,y,z) = \ln \dfrac{x - 2y}{y + 3z}$

n) $f(x,y,z) = e^{3x+y} + \sqrt[3]{xz}$

o) $f(x,y,z) = e^{\sqrt{\frac{x^2}{yz}}}$

p) $f(x,y,z) = x \ln \dfrac{y}{z} + \sqrt{2yz} + 7$

46.- Para las funciones del ejercicio anterior, calcular las derivadas parciales. Comprobar el resultado del teorema de Euler.

47.- Dada $f(x,y)=x^4y^2e^{y/x}$, comprobar que $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=6f$. ¿Qué se deduce de la anterior igualdad?

48.- Sea f una función homogénea de grado m, tal que $f(-1,1)=1$ y $f(-2,2)=1$. Calcular m.

49.- Sea f una función diferenciable y homogénea de grado 2 con $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,2)=3$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,2)=4$. Calcular $f(3,2)$.

50.- De la función $f(x,y,z)$ se sabe que es diferenciable, homogénea de grado 3 y que las componentes de su vector gradiente en el punto $(1,2,3)$ son $(5,2,2)$. ¿Cuál es el valor de la función en el punto $(1,2,3)$?

51.- Sea $z=z(x,y)$ que verifica la ecuación $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$, siendo F una función con derivadas de primer orden, la segunda de ellas no nula. Se pide:

a) Demostrar que $z=z(x,y)$ es homogénea de grado 1.

b) ¿Es homogénea $\dfrac{\partial z}{\partial x}$? En caso afirmativo, ¿de qué grado? Razona la respuesta.

52.- Sea $f(x,y)$ homogénea de grado 1 con derivadas de segundo orden. Probar que:

$$\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{1}{xy}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

53.- Sea $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. Demostrar que:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$$

54.- Dada la función $f(x,y,z)=e^{tg\frac{x^2+y^2+z^2}{xy}}$:

a) Comprobar que es homogénea de grado 0.

b) Calcular $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

55.- Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables y homogéneas de grados 4 y 1, respectivamente. Probar que si $h(x,y,z)=f(x,y,z).g(x,y,z)$, se verifica:

$$x\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) = 5\,h(x,y,z)\,.$$

56.- Sea $f(x,y)$ diferenciable tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=1$, $f(1,1)=2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=1$, $f(1,2)=5$. Decir si f es homogénea y en caso afirmativo de qué grado.

57.- Sea $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$. Se pide:

a) Calcular las curvas de nivel de $f(x, y)$ y representarlas gráficamente.

b) Calcular $\nabla f(2,1)$.

c) Calcular la derivada direccional de f en el punto (2,1) según la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

d) Teniendo en cuenta $\begin{cases} x = 2 + \ln t^2 \\ y = e^{t^3-1} \end{cases}$, calcular $\frac{df}{dt}(1)$.

58.- Sea la función $f(x,y)=ln(1+x^2+2y^2)$. Se pide:

a) Calcular el dominio de f.

b) Calcular el vector gradiente de f en (x,y).

c) ¿Es la función f diferenciable?

d) Calcular la derivada direccional de la función f respecto de la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ en el punto (1,1).

e) ¿Verifica la función f las condiciones del Teorema de Schwarz?

f) Utilizando el resultado del apartado anterior, calcular la matriz Hessiana de f en (x, y).

59.- Sea la función $f(x,y)=\ln\left(\frac{y}{x^2}+1\right)-1$.

a) Determinar las curvas de nivel de la función y representarlas gráficamente.

b) Calcular $\nabla f(1,2e)$.

c) Dado el vector $v=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, calcular la derivada direccional $f_v(1,2e)$.

d) Probar que la curva de nivel 0 de *f* define implícitamente a la variable *y* como función de la variable *x*. Derivando implícitamente calcular $y'(1)$.

60.- Considerar la función de dos variables $f(x,y)=\frac{y}{x+2y}$.

a) Determinar su dominio y representarlo gráficamente.

b) Determinar y representar las curvas de nivel de *f*.

c) Probar que no existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

d) Determinar los pares $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tales que la ecuación $f(x,y)=\frac{b}{a+2b}$ define a la variable *y* como función de la variable *x* en un entorno del punto (a,b). Para cada uno de los pares anteriores, calcular $y'(a)$ por derivación implícita.

61.- Sea $F(x,y,z)=x^2zy+e^{xz}-z^2y+4y$:

a) Sin calcular las derivadas parciales, razona si la siguiente igualdad es cierta:

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=4F(x,y,z).$$

b) Calcular $\nabla F(0,2,1)$.

c) Calcular la derivada direccional de $F(x,y,z)$ respecto de la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ en el punto (0,2,1).

d) Demuestra que la ecuación $F(x,y,z)=7$ define a *x* como función implícita de *y*, *z* (*x* = *f*(*y*, *z*)) en un entorno del punto (0,2,1).

e) Calcular $\nabla f(2,1)$.

f) Calcular la derivada direccional de *f*(*y*,*z*) respecto de la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ en el punto (2,1).

62.- Sabiendo que la oferta de un bien en función de su precio p es:

$$S(p)=\begin{cases}\dfrac{p^2}{20} & \text{si } 0\le p<10\\ 2p-15 & \text{si } 10\le p\le 30\end{cases}$$

a) Determine el dominio de la función de oferta.

b) ¿Cuál es la oferta si el precio es de 5 unidades monetarias?

63.- La demanda de un bien en función de su precio viene dada por una función de la forma $D(p)=ap^2-b$. Determinar los valores de a y de b sabiendo que $D(8)$ = 1 y que $\lim\limits_{p\to 0} D(p)=5$.

64.- El coste total de producir q unidades de un artículo es $C(q)=4q^3-6q^2+18q+12$.

a) Calcule el coste de producir 1 unidad.

b) Si se producen 20 unidades, ¿Cuál es el coste medio de producir cada una de ellas?

c) Escriba la función de coste medio.

d) Escriba la función de coste marginal.

65.- El beneficio, $B(p)$, que obtiene una empresa conocido el precio de venta del producto, $p\in\left[2,6\right]$, viene dado por dos segmentos rectilíneos cuyas pendientes son en ambos casos 0'2. Además se sabe que $B(3)$ = 50 y que al ir aumentando el precio y pasar de 4 unidades monetarias se pierde una subvención que hace bajar el beneficio en 10 unidades. Escriba y represente esta función de beneficio.

66.- La función de costes según el número de horas trabajadas, x, es de la forma $C(x)=\begin{cases}ax^2+b & \text{si } x\in\left[0,100\right]\\ c\sqrt{x} & \text{si } x\in\left(100,200\right]\end{cases}$. Determine a, b, c sabiendo que $C(x)$ es continua, que la pendiente de la recta tangente en x = 50 es 8 y que 121 horas trabajadas suponen un coste igual a 990.

67.- La función de producción de un bien es $Q(K,L)=8\sqrt[3]{K^2L}$, donde Q es la cantidad de producción, K y L la cantidad de inputs capital y trabajo respectivamente.

Demostrar que la productividad del trabajo es una función de la ratio capital-trabajo (sólo depende de la proporción entre el capital y el trabajo).

68.- Sea la función de producción de una empresa $Q(K,L) = 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{2}{5}}$, donde K es el capital, L el trabajo y Q la producción obtenida.

a) Suponiendo que se están utilizando 9 unidades de capital y 32 de trabajo, ¿qué input se deberá aumentar para generar un mayor incremento de la producción, suponiendo que el otro se mantiene constante?

b) Suponiendo que se están utilizando 9 unidades de capital y 32 de trabajo, ¿cuál sería aproximadamente la variación de la producción si se incrementa en 2 unidades el capital y en 1 el trabajo?

c) Sin realizar las derivadas, calcular la expresión $K\frac{\partial Q}{\partial K}(K,L) + L\frac{\partial Q}{\partial L}(K,L)$.

69.- Una empresa produce dos productos en cantidades q_1 y q_2 respectivamente, siendo sus ingresos $I(q_1,q_2) = q_1 q_2$. Cada uno de los productos tiene una función de producción que depende del capital K y del trabajo L que vienen dadas por:

$$q_1(K,L) = 3K + 2L, \qquad q_2(K,L) = 6\sqrt{K^2 L}$$

a) Calcular $\frac{\partial I}{\partial K}(K,L), \frac{\partial I}{\partial L}(K,L)$ cuando se utilizan 4 unidades de capital y 9 de trabajo.

b) ¿Son homogéneas las funciones de producción?, ¿de qué grado?

c) Sin hacer las derivadas, calcular $K\frac{\partial I}{\partial K}(K,L) + L\frac{\partial I}{\partial L}(K,L)$.

INTEGRALES DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

1.- Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1) $\int \frac{3}{1+2y}\, dy$ 2) $\int \frac{6z}{(z^2-5)^5}\, dz$ 3) $\int \frac{1}{t^2}\sqrt{-1+\frac{1}{t}}\, dt$

4) $\int (5-2x+\sqrt[4]{x^3}+8e^x)\, dx$ 5) $\int \frac{t}{1+t^2}\, dt$ 6) $\int \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}\, dy$

7) $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+8\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right) dx$ 8) $\int \left(\frac{1}{3}x+5\right)^9 dx$ 9) $\int \frac{\ln t}{t}\, dt$

10) $\int \frac{5^t-3^t}{7^t}\, dt$ 11) $\int \frac{(\sqrt{x}-2x)^2}{\sqrt{x}}\, dx$ 12) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+13}\, dx$

13) $\int \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}\, dx$ 14) $\int tg(x)\, dx$ 15) $\int \sqrt[3]{cos^2 x}\; senx\, dx$

16) $\int \frac{x}{1+x^2}\, dx$ 17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ 18) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}\, dx$

19) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx$ 20) $\int \frac{4-2x}{x^2-4x+3}\, dx$ 21) $\int \frac{x-3}{x^2-6x+3}\, dx$

22) $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$ 23) $\int \frac{x^2 dx}{(x^3-1)^2}$ 24) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$

2.- Calcular las siguientes integrales definidas:

1) $\int_1^2 \left(x^3-\frac{1}{x^2}+2\right) dx$ 2) $\int_0^1 e^{-t+1}\, dt$ 3) $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx$

4) $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}-\sqrt{x}\right) dx$ 5) $\int_{-2}^0 \left(\frac{x+4}{3}\right)^2 dx$ 6) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\, dx$

3.- Resolver los siguientes problemas de aplicación del cálculo integral al cálculo de áreas:

1) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $3y = x^2$ e $y = -x^2+4x$.

2) Calcular el área de la figura plana limitada por las parábolas $y = x^2-2x$, $y = -x^2+4x$.

3) Calcular el área de la figura plana limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 2x$, $y = \frac{x^2}{2}$.

4) Calcular el área de la figura limitada por las curvas $x = 0$, $x = 2$, $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$.

5) Calcular el área limitada por la curva $y = x^2 - 5x + 6$ y la recta $y = 2x$.

6) Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$.

7) Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$.

8) Calcular el área limitada por las parábolas $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$.

4.- Resolver los siguientes problemas de aplicación del cálculo integral:

1) Para un cierto país, la propensión marginal al consumo está dada por $\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}$ donde el consumo C es una función del ingreso nacional I (en millones de euros). Determinar la función de consumo para el país si se sabe que el consumo es de 1 millón de euros cuando $I = 12$.

2) La función de coste marginal para el producto de un fabricante está dada por: $\frac{dc}{dq} = 10 - \frac{100}{q + 10}$ donde c es el coste total en euros cuando se producen q unidades. Cuando se producen 100 unidades el coste promedio es de 50 euros la unidad. Con aproximación a la unidad de euro más cercana, determinar el coste fijo del fabricante.

3) El coste marginal de la fabricación de un determinado producto viene dado por la función $CMg(x) = 6 - \frac{2}{\sqrt{x}}$. Sabiendo que el coste de funcionamiento es de 84000 euros, hallar la función de coste total de fabricación de dicho producto.

4) Se estima que dentro de t meses la población de cierta ciudad cambiará a razón de $4 + 5t^{2/3}$ personas por mes. Si la población actual es de 10.000 personas, ¿cuál es la población dentro de 8 meses?

5) Se estima que dentro de t años la población de cierta comunidad a la orilla de un lago cambiará a razón de $0.6t^2 + 0.2t + 0.5$ miles de personas al año. Los

ambientalistas han encontrado que el nivel de contaminación del lago aumenta a razón de, aproximadamente, 5 unidades por 1.000 personas. ¿En cuánto aumentará la contaminación del lago durante los próximos 2 años?

6) Un fabricante manifestó que el coste marginal es $6q+1$ euros por unidad cuando se producen q unidades. El coste total (incluidos los gastos indirectos) de producir la primera unidad es de 130 euros. ¿Cuál es el coste total de producir las primeras 10 unidades?